
homework week01: classic model

条件期望与最小二乘法

胡华平

2021-09-28

一、判断题（正确填写 True，错误填写 False）

1. (___) 如果 $Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$ ，而且 $\mathbb{E}[u | X] = 0$ ，那么则有 $\mathbb{E}[X^2 u] = 0$.
2. (___) 如果 $Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$ ，而且 $\mathbb{E}[Xu] = 0$ ，那么则有 $\mathbb{E}[X^2 u] = 0$.
3. (___) 如果 $\mathbf{y} = \mathbf{X}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$ ，而且 $\mathbb{E}[\mathbf{u}|\mathbf{X}] = \mathbf{0}$ ，那么则有 \mathbf{u} 独立于 \mathbf{X} .
4. (___) 如果 $\mathbf{y} = \mathbf{X}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$ ，而且 $\mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{u}] = \mathbf{0}$ ，那么则有 $\mathbb{E}[\mathbf{u}|\mathbf{X}] = \mathbf{0}$.
5. (___) 如果 $\mathbf{y} = \mathbf{X}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$ ，而且 $\mathbb{E}[\mathbf{u}|\mathbf{X}] = \mathbf{0}$ ，以及 $\mathbb{E}[\mathbf{u}^2 | \mathbf{X}] = \sigma^2$ 为常数，那么则有 \mathbf{u} 独立于 \mathbf{X} .

二、证明题

1. 给定如下变量集：

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

以及 $X_3 = \alpha_1 + \alpha_2 X_2$ 是 X_2 的线性函数。

请证明：矩阵 $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}']$ 是不可逆的；

三、计算题

1. 假定随机变量 X 和 Y 都是指示变量（取值为0/1），而且两个随机变量服从如下的联合概率分布：

Table 1: 联合概率分布

	X=0	X=1
Y=0	0.1	0.2
Y=1	0.4	0.3

给定 $X = 0$ 以及 $X = 1$ 的条件下，请分别计算出 $\mathbb{E}[Y | X]$ ， $\mathbb{E}[Y^2 | X]$ ，以及 $\text{var}[Y | X]$ 。

四、分析题

1. 考虑如下两个最小二乘回归模型：

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1 \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1 + \tilde{\mathbf{e}} \text{ (#eq: model1)}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1 \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbf{X}_2 \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \hat{\mathbf{e}} \text{ (#eq: model2)}$$

假定 R_1^2 和 R_2^2 分别是上述两个模型回归的判定系数。

请分析：a) $R_2^2 \geq R_1^2$ ，并做出简要解释。b) 什么情况下 $R_2^2 = R_1^2$ ，并做出简要解释。

2. 给定因变量 Y_i ，以及两个解释变量 X_{1i} 和 X_{2i} 。

A 同学直接构建了 Y_i 对 X_i 的如下一元回归模型（见式(3)）：

$$Y_i = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 X_{1i} + \tilde{u}_i (\#eq: mod1)$$

进一步地 A 同学将上述模型的残存 \tilde{u}_i 继续与解释变量 X_{2i} 进行如下最小二乘回归（见式(4)）：

$$\tilde{u}_i = \tilde{\gamma}_0 + \tilde{\beta}_2 X_{2i} + \tilde{e}_i (\#eq: aux1)$$

与此同时，B 同学直接构建了如下的二元回归模型（见式(5)）

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{e}_i (\#eq: full)$$

请分析： $\tilde{\beta}_2 = \hat{\beta}_2$ 是否成立？简要说明理由！