计量经济学(Econometrics)

胡华平

西北农林科技大学

经济管理学院数量经济教研室

huhuaping01@hotmail.com

2023-02-15

第5章：一元回归：模型形式扩展

5.1 过原点回归

5.2 尺度与测量单位

5.3 标准化变量回归

5.4 对数线性模型

5.5 半对数模型

5.6 倒数模型

5.7 函数模型的选择

5.1 过原点回归

过原点回归的模型形式

过原点回归（regression through the origin）：没有截距项的线性模型

在实践中，双变量PRM过原点回归采取如下的形式：

$$Y_i = \beta_2 X_i + u_i$$

适用于这种模型的例子：

- 弗里德曼的持久收入假说(permanent income hypothesis)；
- 资本资产定价模型(the capital Asset Pricing Model, CAPM)等。

资本资产定价模型（CAPM）

资本资产定价模型(the capital Asset Pricing Model, CAPM):

$$\left(ER_i - r_f\right) = \beta_i\left(ER_m - r_f\right)$$

其中：

- ER_i证券 i的期望回报率；
- ER_m市场证券组合的期望回报率（如标准普尔S&P500综合股票指数）；
- r_f为无风险回报率（90天国债回报率）。
- β_i为系数，表明第 i种证券回报率与市场互动程度的度量。(注:不要把这个 β_i和双变量回归的斜率系数 β_2混同起来。)

一个大于1的 β_i意味着证券 i是一种易波动或进攻型证券；一个小于1的 β_i意味着证券 i是一种防御型证券。

资本资产定价模型（CAPM）

$$R_i - r_f = \beta_i \left(R_m - r_f\right) + u_i$$
$$R_i - r_f = \alpha_i + \beta_i \left(R_m - r_f\right) + u_i$$

- 如果CAPM成立，则预期 α_i 为0。
- 这样的模型如何估计呢？

这类模型的SRM可以写成：

$$Y_i = \hat{\beta}_2 X_i + \mathrm{e}_i$$

OLS方法下求解回归系数：

$$\sum \mathrm{e}_i^2 = \sum \left(Y_i - \hat{\beta}_2 X_i\right)^2$$

$$\frac{\partial \sum \mathrm{e}_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = 2\sum \left(Y_i - \hat{\beta}_2 X_i\right)(-X_i) = 0$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} = \frac{\sum X_i (\beta_2 X_i + u_i)}{\sum X_i^2} = \beta_2 + \frac{\sum X_i u_i}{\sum X_i^2}$$

$$E\left(\hat{\beta}_2\right) = \beta_2$$

OLS方法下求解得到的方差：

$$
\begin{aligned}
Var\left(\hat{\beta}_2\right) &= E\left(\hat{\beta}_2-\beta_2\right)^2 \\
&= E\left[\frac{\sum X_i u_i}{\sum X_i^2}\right]^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum X_i^2}
\end{aligned}
$$

$$
\hat{\sigma}^2=\frac{\sum e_i^2}{n-1}; \quad \mathrm{E}\left(\hat{\sigma}^2\right)=\sigma^2
$$

OLS估计量对比：无截距和有截距的差异：

$$Y_i = \hat{\beta}_2 X_i + \mathrm{e}_i \qquad\qquad Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \mathrm{e}_i$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} \qquad\qquad \hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$Var\left(\hat{\beta}_2\right) = \frac{\sigma^2}{\sum X_i^2} \qquad\qquad Var\left(\hat{\beta}_2\right) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \mathrm{e}_i^2}{n-1} \qquad\qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \mathrm{e}_i^2}{n-2}$$

> 第一，对有截距项的模型来说，总有 $\sum e_i = 0$；对无截距项的模型来说，$\sum e_i = 0$ 不一定成立，只有 $\sum e_i X_i = 0$成立。
> 第二，对有截距项的模型，判定系数 $r^2 \geq 0$；但是，对无截距模型来说，r^2时可能出现负值。

过原点回归的判定系数 r^2 的计算公式如下：

$$
\begin{aligned}
TSS &= \sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2 \\
RSS &= \sum e_i^2 = \sum Y_i^2 - \hat{\beta}_2^2 \sum X_i^2 \\
r^2 &= 1 - \frac{RSS}{TSS} > 0; \quad r^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} < 0;
\end{aligned}
$$

因此，对于无截距模型，我们给出拟合优度指标为**毛判定系数**（Raw r^2）：

$$
Raw \quad r^2 = \frac{\sum (X_i Y_i)^2}{\sum X_i^2 \sum Y_i^2}
$$

资本资产定价模型（CAPM）

启示：

- 第一，尽管模型含有截距项，但若该项的出现是统计上不显著的(即统计上等于零)，则从任何实际方面考虑，都可认为这个结果是一个过原点回归模型。
- 第二，如果在模型中确实有截距，而我们却执意拟合一个过原点回归，我们就犯了**设定错误**。

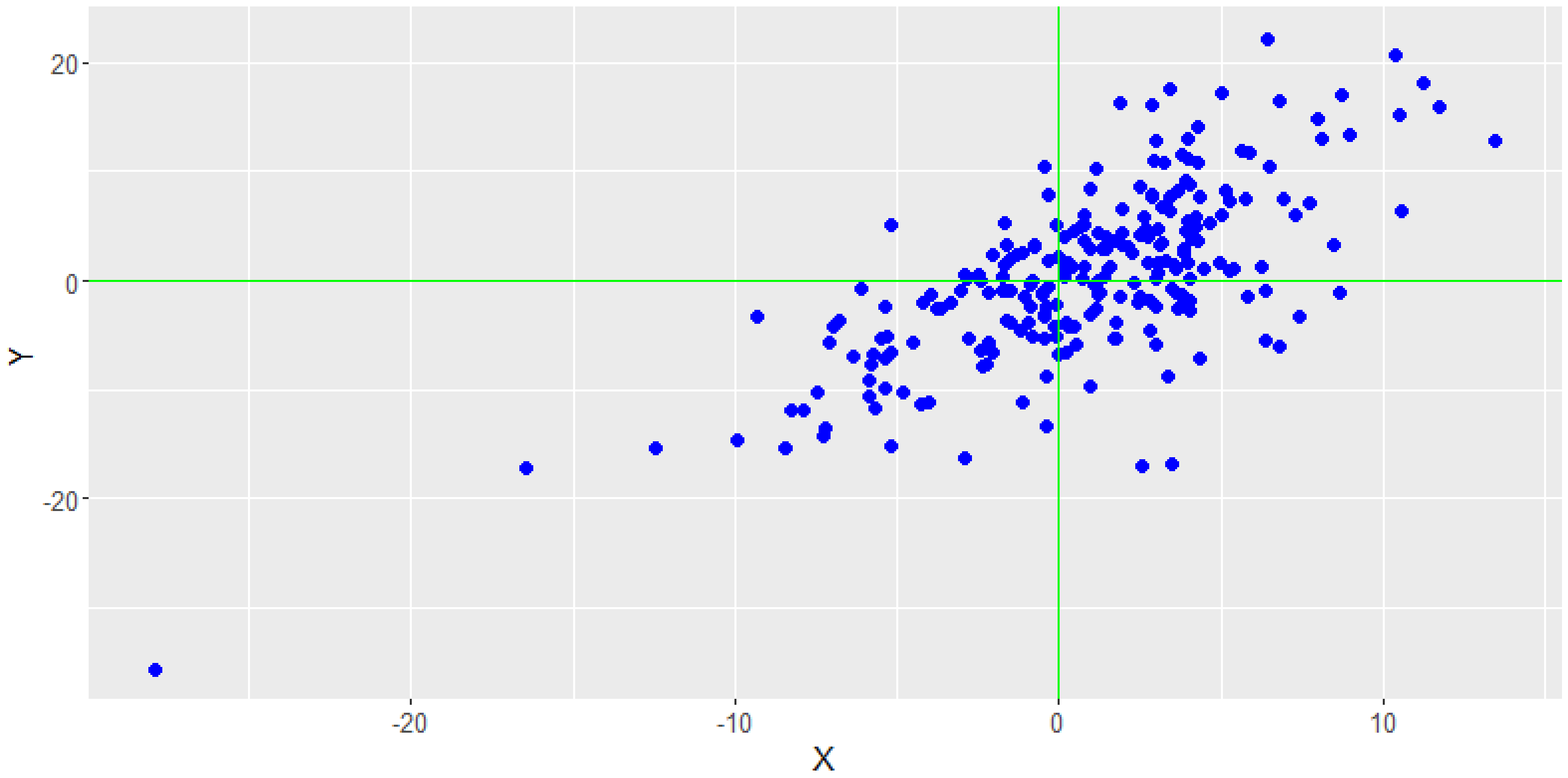
1980.01-1999.12年间104 种股票构成的一个指数的超额回报率 Y_t(%)和英国总体股票指数的超额回报率 X_t(%)的月度数据共n=240个月观测。其中超额回报率指的是超过无风险资产回报率的部分。

year	month	X	Y
1980	1	7.2634	6.0802
1980	2	6.3399	-0.9242
1980	3	-9.2852	-3.2862
1980	4	0.7933	5.2120
1980	5	-2.9024	-16.1642
1980	6	8.6132	-1.0547
1980	7	3.9821	11.1724
1980	8	-1.1502	-11.0633

Showing 1 to 8 of 240 entries

Previous 1 2 3 4 5 … 30 Next

下面先直接给出二者的散点图：



两类模型回归结果对比:

无截距模型:

$$Y_i = \hat{\beta}_2 X_i + e_i$$

$$\begin{array}{ll} \widehat{Y} = & +1.16X \\ (\mathrm{t}) & (15.5320) \\ (\mathrm{se}) & (0.0744) \\ (\mathrm{fitness}) & R^2 = 0.5023; \bar{R}^2 = 0.5003 \\ & F^* = 241.24; p = 0.0000 \end{array}$$

有截距模型:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + e_i$$

$$\begin{array}{lll} \widehat{Y} = & -0.45 & +1.17X \\ (\mathrm{t}) & (-1.2329) & (15.5350) \\ (\mathrm{se}) & (0.3629) & (0.0754) \\ (\mathrm{fitness}) & R^2 = 0.5035; \bar{R}^2 = 0.5014 & \\ & F^* = 241.34; p = 0.0000 & \end{array}$$

5.2 尺度与测量单位

案例数据

回归分析中，因变量Y和解释变量X的测量单位不同会造成回归结果的差异吗？

Year	GPDIB	GPDIM	GDPB	GDPM	GPDIB_std	GDPB_std
1990	886.6	886600	7112.5	7112500	-1.2942	-1.3459
1991	829.1	829100	7100.5	7100500	-1.4624	-1.3550
1992	878.3	878300	7336.6	7336600	-1.3185	-1.1768
1993	953.5	953500	7532.7	7532700	-1.0986	-1.0287
1994	1042.3	1042300	7835.5	7835500	-0.8389	-0.8002

Showing 1 to 5 of 16 entries

Previous 1 2 3 4 Next

>

- GPDIB = 以2000年**10亿**(Billions)美元计国内私人总投资； GPDIM = 以2000年**百万**(millions)美元计国内私人总投资；
- GDPB = 以2000年**10亿**(Billions)美元计GDP总值； GDPM = 以2000年**百万**

尺度变换

把某一测量单位下的回归模型，变换为另一测量单位的回归模型：

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \mathrm{e}_i$$
$$Y_i^* = \hat{\beta}_1^* + \hat{\beta}_2^* X_i + \mathrm{e}_i^*$$

尺度因子： $\omega_1;\omega_2$分别表示为Y和X的尺度因子。

$$Y_i^* = \omega_1 Y_i \quad X_i^* = \omega_2 X_i$$

如果 $(Y_i; X_i)$都是以**10亿**(billion)美元计量的，我们把它们改为用**百万**(million)美元去度量，就会有：

$$Y_i^* = 1000Y_i; \quad X_i^* = 1000X_i; \quad \omega_1 = \omega_2 = 1000$$

OLS估计

进行数据转换，新模型的OLS估计量如下：

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \mathrm{e}_i \\
Y_i^* &= \hat{\beta}_1^* + \hat{\beta}_2^* X_i + \mathrm{e}_i^* \\
Y_i^* &= \omega_1 Y_i; \quad X_i^* = \omega_2 X_i; \quad e_i^* = \omega_1 e_i
\end{aligned}
$$

$$
\hat{\beta}_2* = \frac{\sum x_i^* y_i^*}{\sum x_i^{*2}} \qquad \Leftarrow \operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2^*\right) = \frac{\sigma^{*2}}{\sum x_i^{*2}}
$$

$$
\hat{\beta}_1^* = \overline{Y}^* - \hat{\beta}_2^* \overline{X}^* \qquad \Leftarrow \operatorname{var}\left(\hat{\beta}_1^*\right) = \frac{\sum X_i^{*2}}{n \sum x_i^{*2}} \cdot \sigma^{*2}
$$

$$
\hat{\sigma}^{*2} = \frac{\sum e_i^{*2}}{n-2}
$$

OLS估计

进行数据转换，两个模型下OLS估计量有如下关系：

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \mathrm{e}_i \\
Y_i^* &= \hat{\beta}_1^* + \hat{\beta}_2^* X_i + \mathrm{e}_i^* \\
Y_i^* &= \omega_1 Y_i; \quad X_i^* = \omega_2 X_i; \quad e_i^* = \omega_1 e_i
\end{aligned}
$$

$$
\hat{\beta}_1^* = (\omega_1)\,\hat{\beta}_1; \qquad \hat{\beta}_2^* = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\hat{\beta}_2
$$

$$
\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2^*\right) = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right); \qquad \operatorname{var}\left(\hat{\beta}_1^*\right) = \omega_1^2 \operatorname{var}\left(\hat{\beta}_1\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}^{*2} &= \omega_1^2 \hat{\sigma}^2 \\
r_{xy}^2 &= r_{x*y^*}^2
\end{aligned}
$$

相关结论

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \mathrm{e}_i$$
$$Y_i^* = \hat{\beta}_1^* + \hat{\beta}_2^* X_i + \mathrm{e}_i^*$$
$$Y_i^* = \omega_1 Y_i; \quad X_i^* = \omega_2 X_i; \quad e_i^* = \omega_1 e_i$$

模型对比，得出如下主要结论：

- $\omega_1 = \omega_2$，即尺度因子相等时，**斜率系数**及其**标准误**不受尺度从（Y_i, X_i）到（Y_i^*, X_i^*）的影响。**截距**及其**标准误**却放大或缩小至 ω_1 倍。
- X_i 尺度不变 $\omega_2 = 1$，Y_i 尺度因子 ω_1 变化，那么，斜率和截距系数以及它们各自的标准误都要乘以同样的因子 ω_1。
- Y_i 尺度不变 $\omega_1 = 1$，而 X_i 尺度因子 ω_2 变化，那么，斜率系数及其标准误都要乘以因子 $1/\omega_1$，而截距系数及其标准误不变。

案例分析结果

GPDI和GDP都以十亿美元计算：

$$
\begin{aligned}
&\widehat{GPDIB} = -926.09 && +0.25GDPB\\
&(\mathrm{t}) \quad (-7.9590) && (19.5824)\\
&(\mathrm{se}) \quad (116.3577) && (0.0129)\\
&(\mathrm{fitness}) \quad R^2 = 0.9648; \bar{R}^2 = 0.9623\\
&F^* = 383.47; p = 0.0000
\end{aligned}
$$

GPDI和GDP都以百万美元计算：

$$
\begin{aligned}
&\widehat{GPDIM} = -926090.39 && +0.25GDPM\\
&(\mathrm{t}) \quad (-7.9590) && (19.5824)\\
&(\mathrm{se}) \quad (116357.6965) && (0.0129)\\
&(\mathrm{fitness}) \quad R^2 = 0.9648; \ \bar{R}^2 = 0.9623\\
&F^* = 383.47; \ p = 0.0000
\end{aligned}
$$

GPDI以十亿美元，而GDP以百万美元：

$$
\begin{aligned}
&\widehat{GPDIB} = -926.09 && +0.00GDPM\\
&(\mathrm{t}) \quad (-7.9590) && (19.5824)\\
&(\mathrm{se}) \quad (116.3577) && (0.0000)\\
&(\mathrm{fitness}) \quad R^2 = 0.9648; \bar{R}^2 = 0.9623\\
&F^* = 383.47; p = 0.0000
\end{aligned}
$$

GPDl以百万美元而GDP 以十亿美元：

$$
\begin{aligned}
&\widehat{GPDIM} = -926090.39 && +253.52GDPB\\
&(\mathrm{t}) \quad (-7.9590) && (19.5824)\\
&(\mathrm{se}) \quad (116357.6965) && (12.9465)\\
&(\mathrm{fitness}) \quad R^2 = 0.9648; \ \bar{R}^2 = 0.9623\\
&F^* = 383.47; \ p = 0.0000
\end{aligned}
$$

5.3 标准化变量回归

标准化变量回归

假设如下双变量回归：

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + e_i$$

对Y和X作如下标准化变换，得到相应的**标准化变量**：

$$Y_i^* = \frac{Y_i - \overline{Y}}{S_Y}; \quad X_i^* = \frac{X_i - \overline{X}}{S_X}$$

- 标准化变量的特征是：其均值总是0 和标准差总是1。

标准化变量回归

得到如下新的双变量回归模型:

$$
\begin{aligned}
Y_i^* &= \hat{\beta}_1^* + \hat{\beta}_2^* X_i + e_i^* \\
&= \hat{\beta}_2^* X_i + e_i^*
\end{aligned}
$$

- 对标准化的回归子和回归元做回归，截距项总是零!
- 实际上变成了过原点回归模型!

标准化变量回归

模型比较与结论：

- 第一，由于标准化回归本质上是一个过原点回归，而我们在已经指出通常过原点回归的不能使用 r^2，所以我们就没有给出其 r^2值。
- 第二，传统模型的系数与这里的系数之间存在一种有趣的关系。在双变量情形中，这种关系如下（证明过程略：自学练习题！）：

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{S_X}{S_Y}\hat{\beta}_2$$

- 第三，在多元回归中，变量标准化可以去除多个自变量之间数量尺度(量纲)的差别，因而具有一定的优点！

标准化数据变换

下面我们对以十亿美元计的GPDIB和GDPB进行标准化数据变换：

Year	GPDIB	GDPB	GPDIB_std	GDPB_std
1990	886.6	7112.5	-1.2942	-1.3459
1991	829.1	7100.5	-1.4624	-1.3550
1992	878.3	7336.6	-1.3185	-1.1768
1993	953.5	7532.7	-1.0986	-1.0287
1994	1042.3	7835.5	-0.8389	-0.8002
1995	1109.6	8031.7	-0.6421	-0.6521
1996	1209.2	8328.9	-0.3508	-0.4277
1997	1320.6	8703.5	-0.0250	-0.1450

Showing 1 to 8 of 16 entries

Previous 1 2 Next

GPDI和GDP都以十亿美元计算：

$$
\begin{aligned}
&\widehat{GPDIB} = -926.09 && +0.25GDPB \\
&(\text{t}) \quad (-7.9590) && (19.5824) \\
&(\text{se}) \quad (116.3577) && (0.0129) \\
&(\text{fitness}) \quad R^2 = 0.9648; \bar{R}^2 = 0.9623 \\
&F^* = 383.47; p = 0.0000
\end{aligned}
$$

标准化变量后的模型估计：

$$
\begin{aligned}
&\widehat{GPDIB}_std = +0.98GDPB_{std} \\
&(\text{t}) \quad (20.2697) \\
&(\text{se}) \quad (0.0485) \\
&(\text{fitness}) \quad R^2 = 0.9648; \quad \bar{R}^2 = 0.9624 \\
&F^* = 410.86; \quad p = 0.0000
\end{aligned}
$$

回归模型的函数形式

对数线性模型

半对数模型

倒数模型

5.4 对数线性模型

对数线性模型的形式

指数回归模型（exponential regression model）

$$Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2} e^{u_i}$$

可化为：

$$\begin{aligned}
\ln Y_i &= \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + u_i \\
\ln Y_i &= \alpha + \beta_2 \ln X_i + u_i \qquad \Leftarrow \alpha = \ln \beta_1
\end{aligned}$$

这种模型被称为对数-对数(log-log)，双对数(double-log)或对数一线性(log-linear)模型。进而有：

$$Y_i^* = \alpha + \beta_2 X_i^* + u_i \qquad \Leftarrow \left[Y_i^* = \ln Y_i; \quad X_i^* = \ln X_i\right]$$

从而可用OLS方法可以得到BLUE估计量：

$$Y_i^* = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_2 X_i^* + \mathrm{e}_i$$

对数线性模型：学会如何测度弹性

双数线性模型：

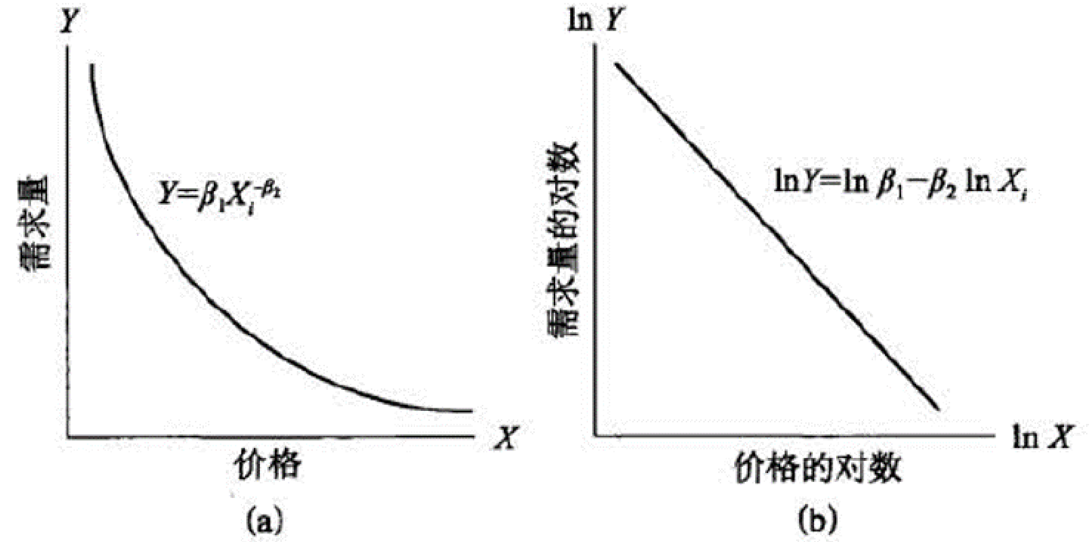
$$\ln Y_i = \alpha + \beta_2 \ln X_i + u_i$$
$$Y_i^* = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_2 X_i^* + \mathrm{e}_i \qquad \Leftarrow \hat{\alpha} = \ln \hat{\beta}_1$$

$$\beta_2 = \frac{d(\ln Y)}{d(\ln X)} = \frac{\frac{1}{Y} dY}{\frac{1}{X} dX} = \frac{dY/Y}{dX/X}$$

斜率就是Y对X的弹性！如果Y代表商品需求量Q，X代表商品价格P，则就表示该商品的需求价格弹性。

双数线性模型有如下性质：

- Y对X的弹性在整个研究范围内是常数，一直为 β_2，因此这种模型也称为不变弹性模型(constant elasticity model)。
- 虽然 $\hat{\alpha}$和 $\hat{\beta}_2$是无偏估计量，但是进入原始模型的参数 β_1的估计值 $\hat{\beta}_1$却是有偏估计，而且 $\beta_1 = antilog\hat{\alpha}$。



耐用品支出与个人消费总支出的关系：

obs	EXPDUR	PCEXP	ln_expdur	ln_pcexp
2003-I	971.4	7184.9	6.8787	8.8797
2003-II	1009.8	7249.3	6.9175	8.8887
2003-III	1049.6	7352.9	6.9562	8.9029
2003-IV	1051.4	7394.3	6.9579	8.9085
2004-I	1067	7479.8	6.9726	8.9200

Showing 1 to 5 of 15 entries

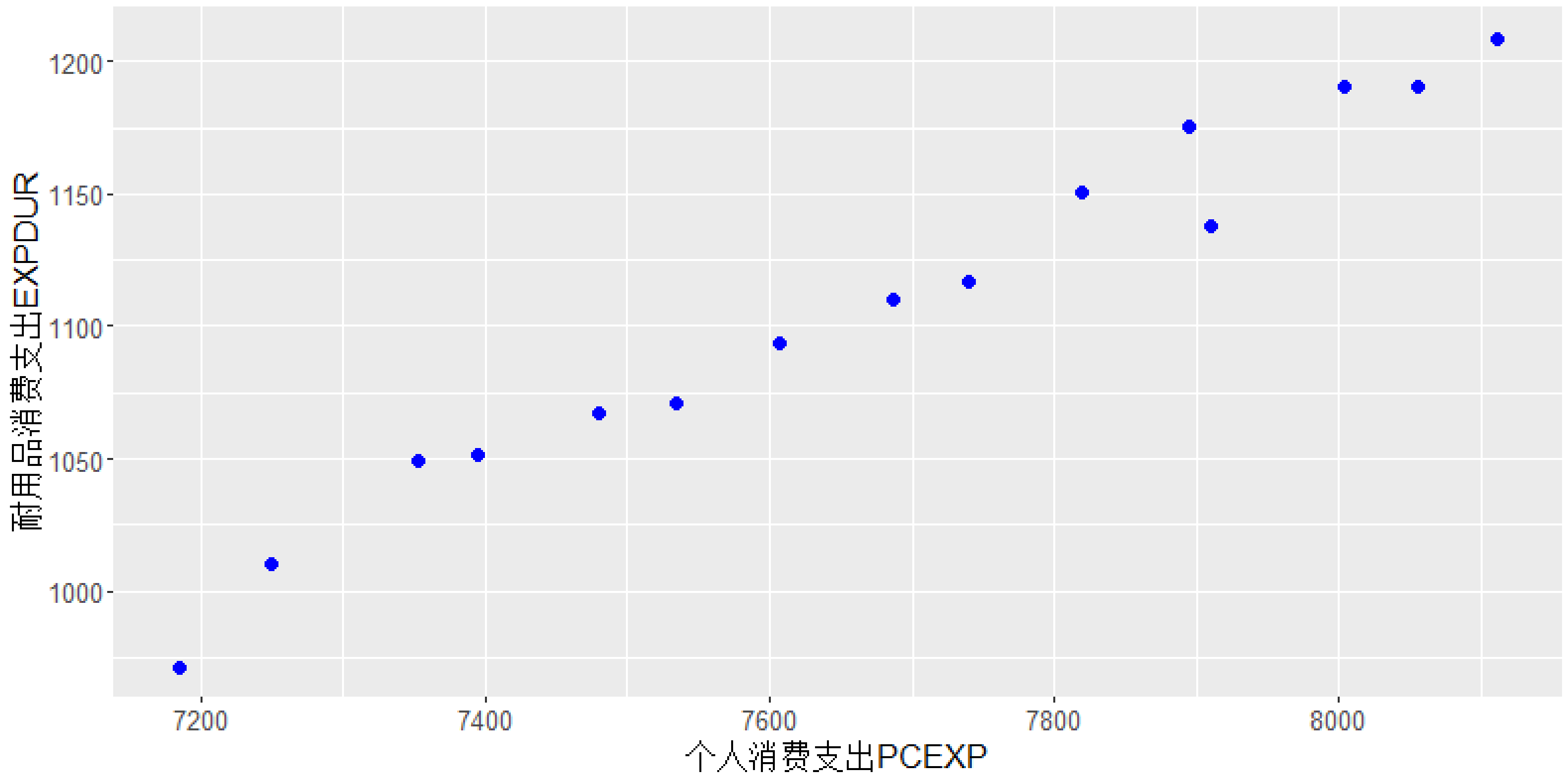
Previous 1 2 3 Next

其中：PCEXP=个人消费支出, EXPDUR=耐用品消费支出，单位10亿美元（按2000年价格计）

耐用品消费案例

假设我们想求出耐用品支出对个人消费总支出的**斜率**。

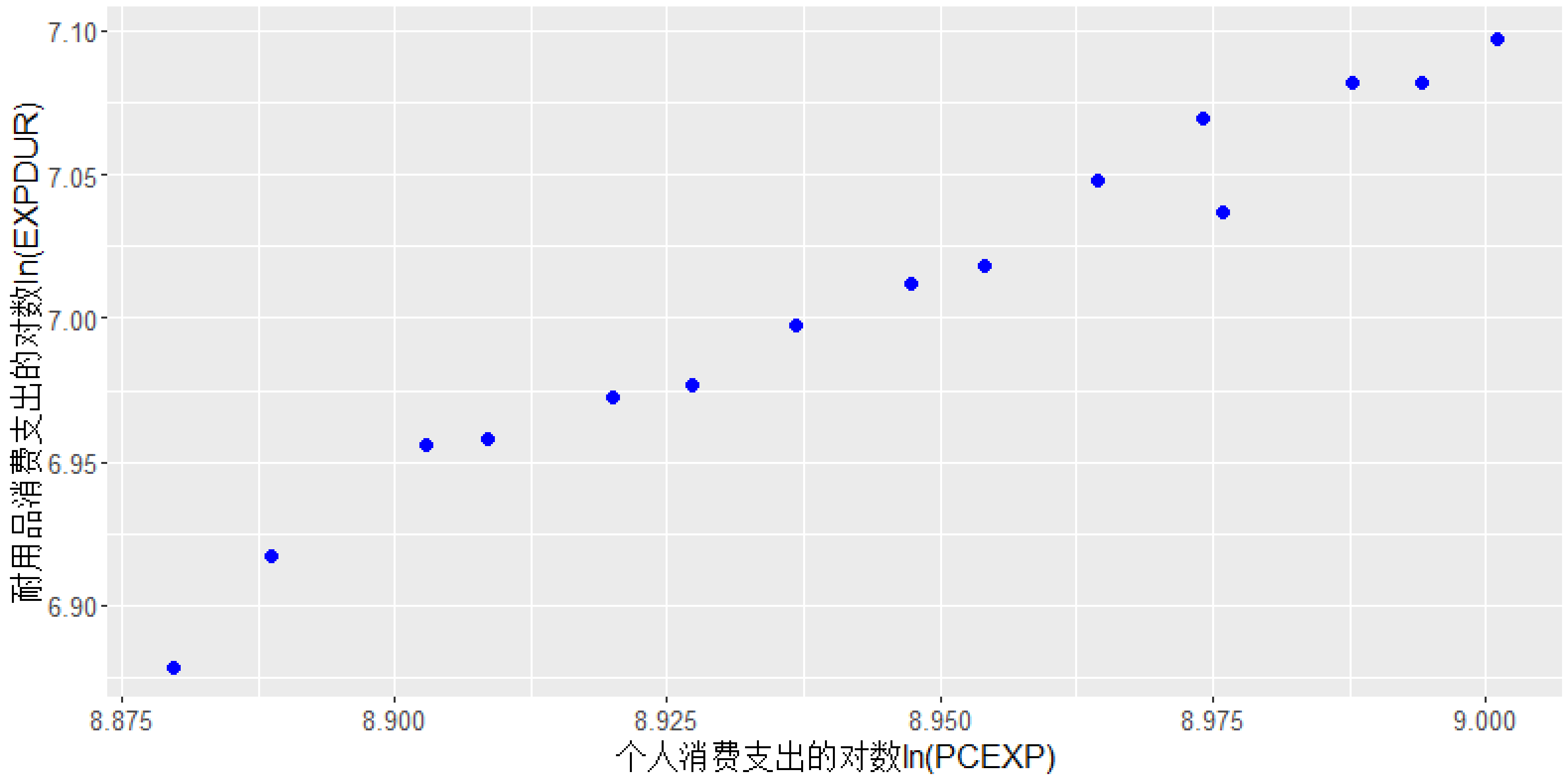
将耐用品支出相对于个人消费总支出做散点图：



耐用品消费案例

假设我们想求出耐用品支出对个人消费总支出的**弹性**。

将耐用品支出的**对数**相对于个人消费总支出的**对数**做散点图：



耐用品消费案例

耐用品消费案例中，我们可以实证得到如下的**双对数模型**：

$$
\begin{array}{lll}
log(\widehat{EXPDUR}) = & -7.54 & +1.63log(PCEXP) \\
(\text{t}) & (-10.5309) & (20.3152) \\
(\text{se}) & (0.7161) & (0.0801) \\
(\text{fitness}) & R^2 = 0.9695; \bar{R}^2 = 0.9671 & \\
 & F^* = 412.71; p = 0.0000 &
\end{array}
$$

5.5 半对数模型

线性到对数模型

怎样测量增长率？经济学家、企业人员与政府常常对于求出某些经济变量的增长率感兴趣，如人口、GNP、货币供给、就业、生产力、贸易赤字等。

$$Y_t = Y_0(1+r)^t$$

Y_t＝时期t的劳务实际支出； Y_0＝劳务实际支出的初始值(为2002年第四季度末的值)；r是Y的复合增长率。

劳务支出数据

obs	t	EXPSERVICES	ln_expservices
2003-I	1	4143.3	8.3292
2003-II	2	4161.3	8.3336
2003-III	3	4190.7	8.3406
2003-IV	4	4220.2	8.3476

Showing 1 to 4 of 15 entries

Previous 1 2 3 4 Next

线性到对数模型

半对数模型(semilog models)：

- 线性到对数模型(log-lin model)：只有回归子Y取对数
- 对数到线性模型(lin-log model)：只有回归元X取对数

半对数模型的形式：

$$
\begin{aligned}
Y_t &= Y_0(1+r)^t \\
\ln Y_t &= \ln Y_0 + t\ln(1+r) \\
\ln Y_t &= \beta_1 + \beta_2 t \qquad\qquad \Leftarrow [\beta_1 = \ln Y_0; \quad \beta_2 = \ln(1+r)] \\
\ln Y_t &= \beta_1 + \beta_2 t + u_t
\end{aligned}
$$

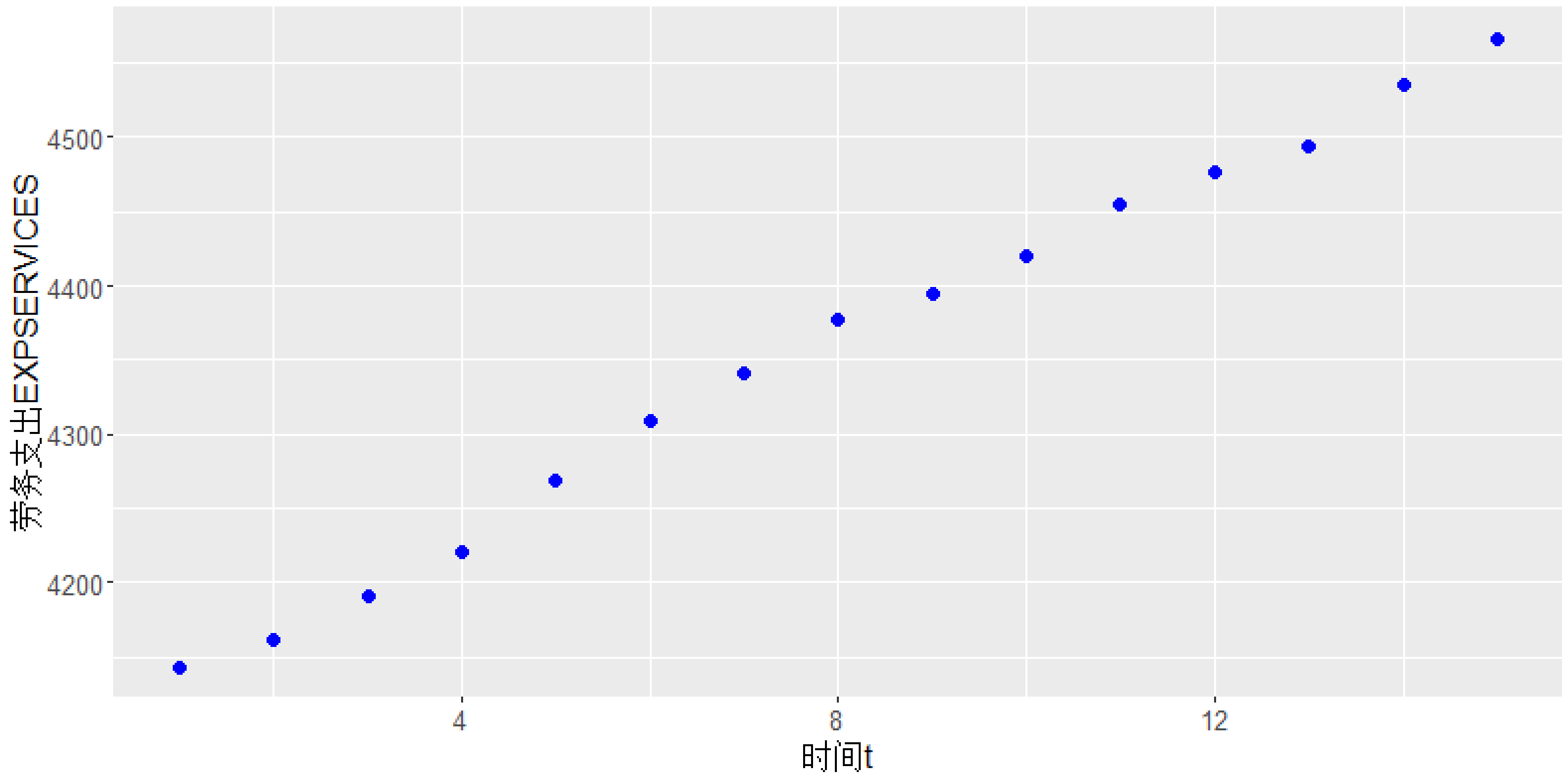
斜率 β_2的经济学含义：

$$
\beta_2 = \frac{d\ln Y}{dt} = \frac{dY/Y}{dt}
$$

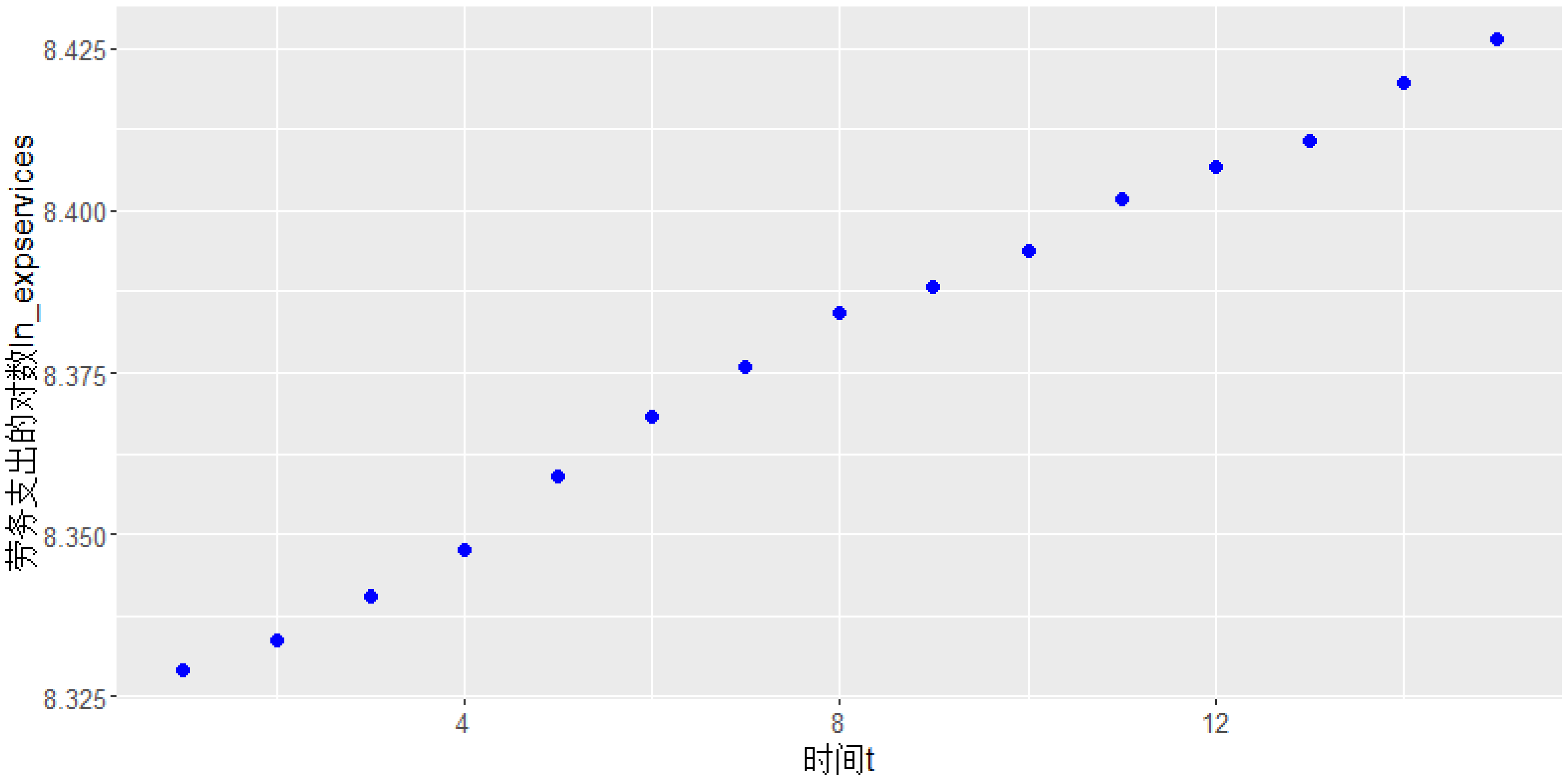
恒定相对增长率模型： 上述模型描述了因变量Y的恒定相对增长率

- 恒定相对增长模型： $\beta_2 > 0$
- 恒定相对衰减模型： $\beta_2 < 0$

散点图I



散点图2



OLS估计

半对数模型：线性到对数模型

$$\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t \qquad \Leftarrow [\beta_1 = \ln Y_0; \quad \beta_2 = \ln(1+r)]$$

$$\begin{array}{lll}
log(\widehat{EXPSERVICES}) = & +8.32 & +0.01t \\
\text{(t)} & (5186.2999) & (39.9648) \\
\text{(se)} & (0.0016) & (0.0002) \\
\text{(fitness)} & R^2 = 0.9919; & \bar{R}^2 = 0.9913 \\
 & F^* = 1597.18; p = 0.0000 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_2 &= \ln(1+r) = 0.00705 \\
r &= \text{antilog}\left(\hat{\beta}_2\right) - 1 \\
&= \text{antilog}(0.00705) - 1 \\
&= 0.00708
\end{aligned}$$

- $\hat{\beta}_2 = 0.00705$表示**瞬时增长率**
- $r = 0.00708$表示**复合增长率**

回归结果比较

下面做一个对比模型。线性趋势模型：Y直接对时间t回归：

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{EXPSERVICES} = +\,4111.54 && +\,30.67t \\
&\text{(t)} \quad (655.5628) && (44.4671) \\
&\text{(se)} \quad (6.2718) && (0.6898) \\
&\text{(fitness)} \quad R^2 = 0.9935; && \bar{R}^2 = 0.9930 \\
&F^* = 1977.32; p = 0.0000
\end{aligned}$$

解释如下： 在2003年第1季度至2006年第3季度期间，劳务支出以每季度约300 亿美元的绝对速度(注意不是相对速度)增加，即劳务支出有上涨的趋势。

对数到线性模型(lin-log model)

如果我们的目的是测量X的一个百分比变化时，Y的绝对变化量，则要用**对数到线性模型**（lin-log model）。

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + u_i$$

$$\beta_2 = \frac{dY}{d\ln X} = \frac{dY}{dX/X} = \frac{\Delta \mathrm{Y}}{\Delta \mathrm{X}/X}$$

$$\Delta \mathrm{Y} = \beta_2 \frac{\Delta \mathrm{X}}{\mathrm{X}}$$

例如：恩格尔支出(Engel expenditure) 模型：

- “用于食物的总支出以算术级数增加，而总支出以几何级数增加。”

家庭食物支出案例

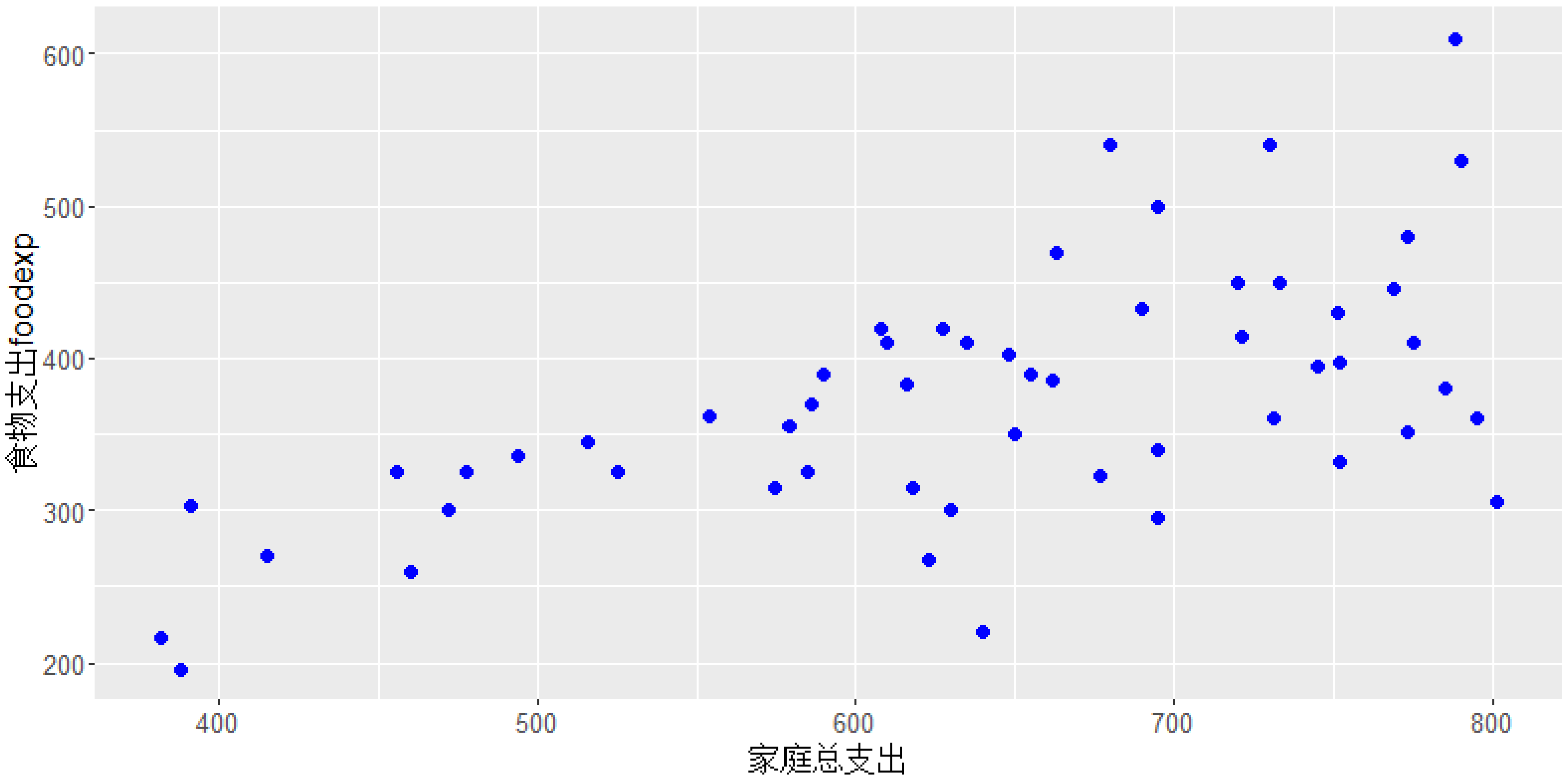
食物支出（`foodexp`）与家庭总支出（`totalexp`）的关系：

obs	foodexp	totalexp	ln_totalexp
1	217	382	5.9454
2	196	388	5.9610
3	303	391	5.9687
4	270	415	6.0283
5	325	456	6.1225

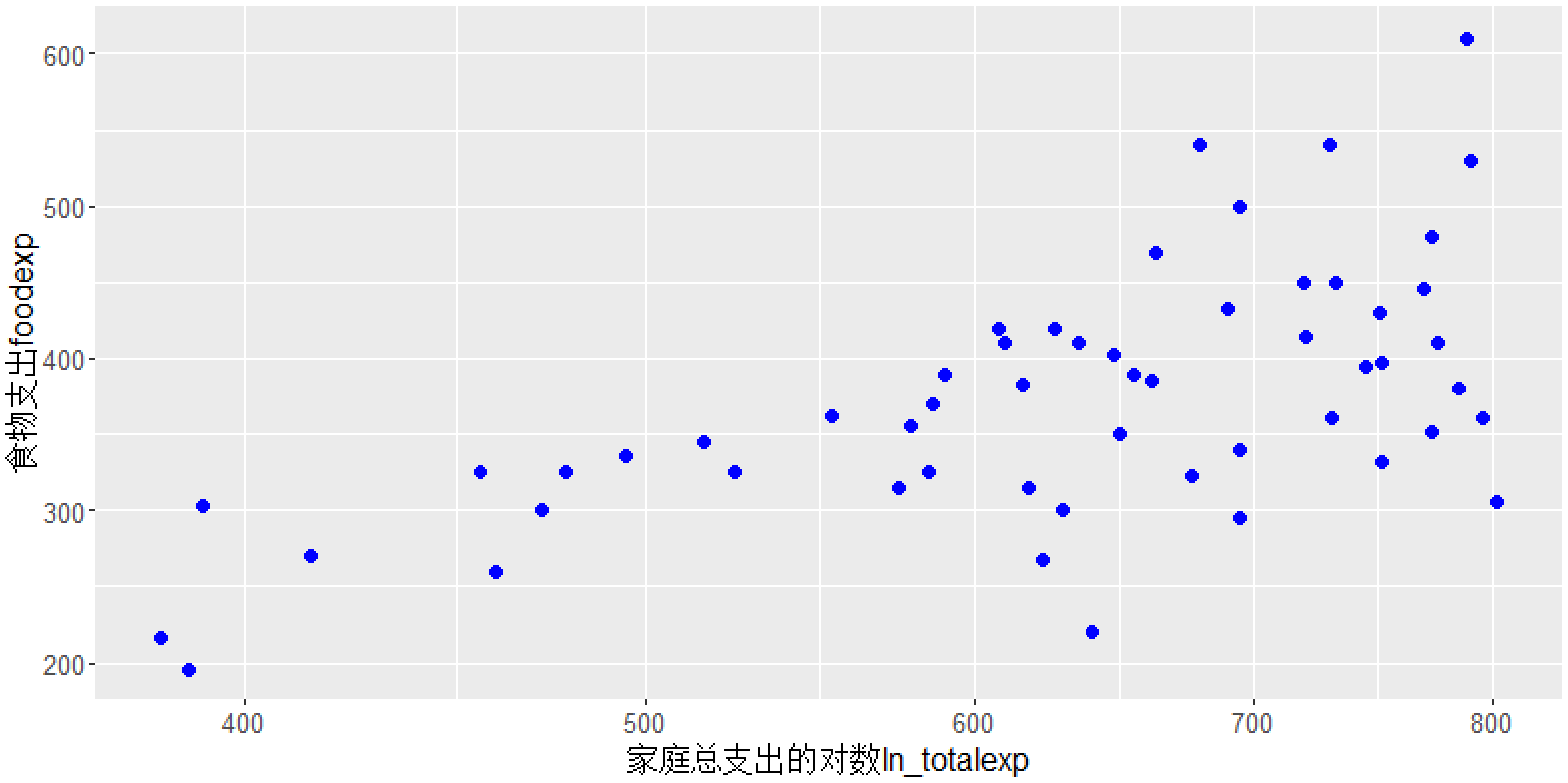
Showing 1 to 5 of 55 entries

Previous 1 2 3 4 5 … 11 Next

原始数据作散点图：



对家庭总支出取对数`ln(totalexp)`，再做散点图：



构建如下对数到线性模型：

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + u_i$$

家庭食物支出案例的OLS估计结果如下：

$$\begin{array}{lll}
\widehat{foodexp} = & -1283.91 & +257.27log(totalexp) \\
\text{(t)} & (-4.3848) & (5.6625) \\
\text{(se)} & (292.8105) & (45.4341) \\
\text{(fitness)} & R^2 = 0.3769; \bar{R}^2 = 0.3652 & \\
 & F^* = 32.06;\ p = 0.0000 &
\end{array}$$

对比构建如下经典线性模型及其OLS估计结果：

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

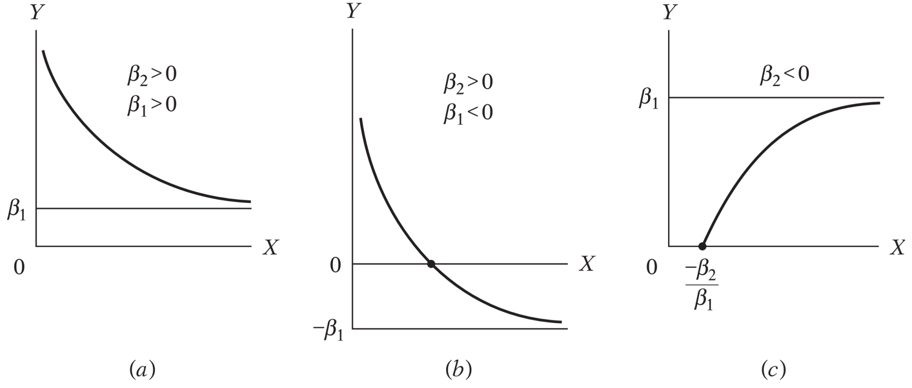
$$\begin{array}{lll}
\widehat{foodexp} = & +94.21 & +0.44totalexp \\
\text{(t)} & (1.8524) & (5.5770) \\
\text{(se)} & (50.8563) & (0.0783) \\
\text{(fitness)} & R^2 = 0.3698; \bar{R}^2 = 0.3579 & \\
 & F^* = 31.10;\ p = 0.0000 &
\end{array}$$

5.6 倒数模型

倒数模型

形式：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2\left(\frac{1}{X_i}\right) + u_i$$



特征： 总有一条内在的渐近线！

- a.平均固定成本(AFC)曲线
- b.菲利普斯曲线（Phillips curve）
- c.恩格尔曲线（the Engel expenditure curve）

$$X \to \infty; \quad \beta_2\left(\frac{1}{X}\right) \to 0; \quad Y \to \beta_1$$

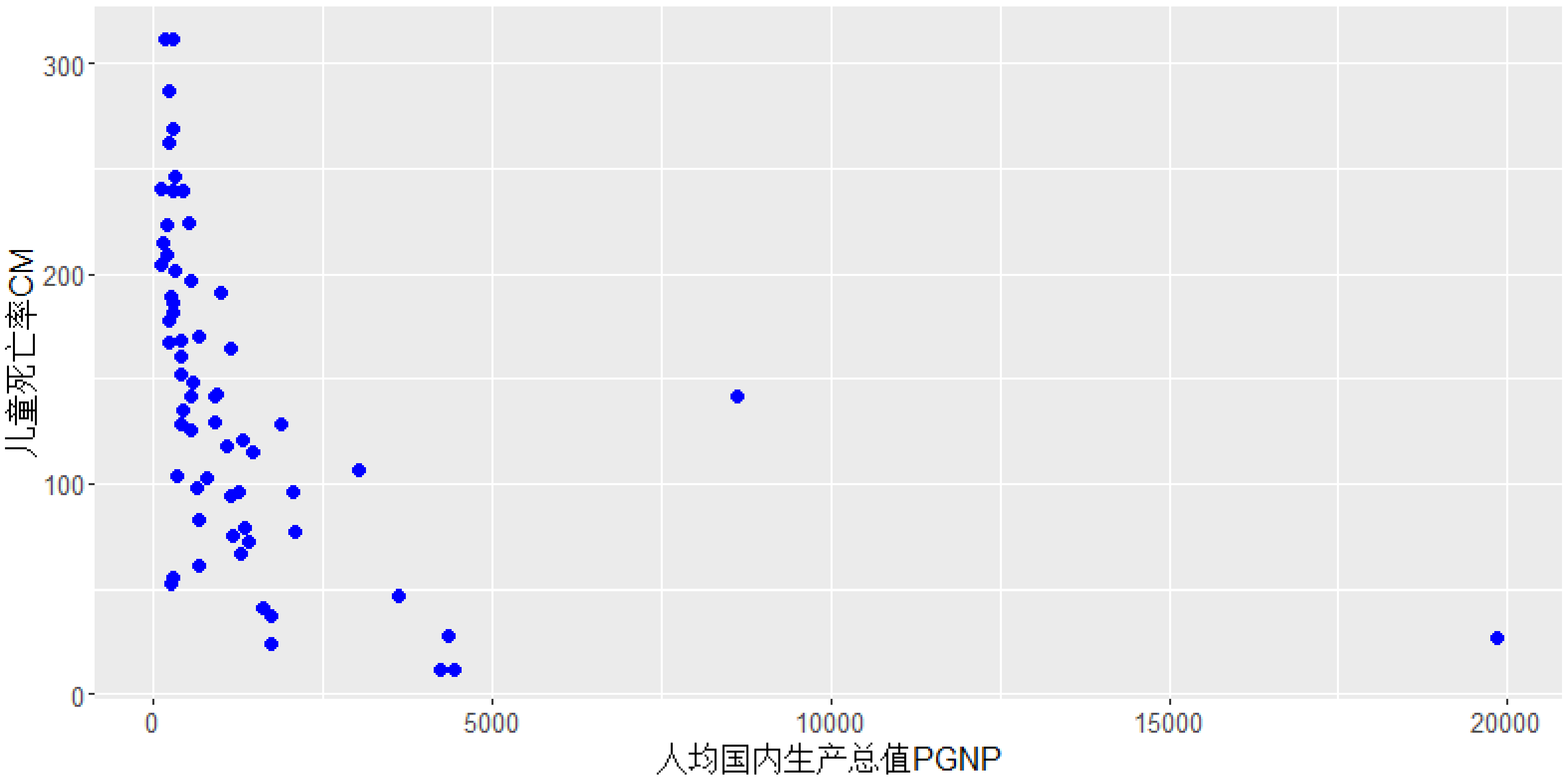
儿童死亡率（`CM`，千分数）与人均GNP（`PGNP`，1980年的人均GNP）的关系：

obs	CM	PGNP	rep_PGNP
1	128	1870	0.0005
2	204	130	0.0077
3	202	310	0.0032
4	197	570	0.0018
5	96	2050	0.0005

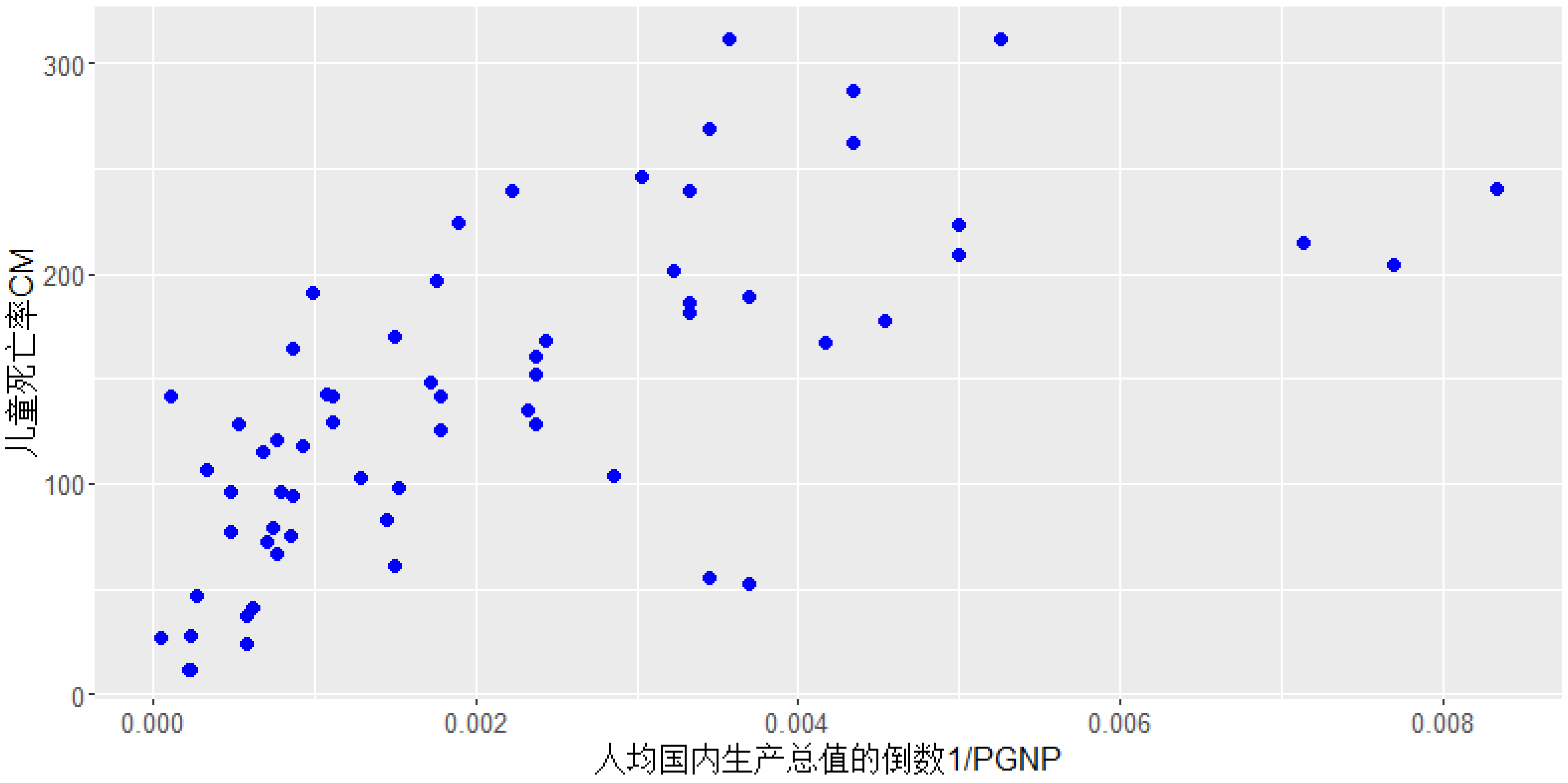
Showing 1 to 5 of 64 entries

Previous 1 2 3 4 5 … 13 Next

原始数据作散点图：



把PGNP取倒数 $1/PGNP$再作散点图：



儿童死亡率案例

构建如下倒数模型：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{X_i}\right) + u_i$$

儿童死亡率案例倒数模型的OLS估计结果如下：

$$\begin{array}{llll}
\widehat{CM} = & +81.79 & +27273.17rep_{PGNP} \\
(\mathrm{t}) & (7.5511) & (7.2535) \\
(\mathrm{se}) & (10.8321) & (3759.9992) \\
(\mathrm{fitness}) R^2 = 0.4591; \bar{R}^2 = 0.4503 \\
F^* = 52.61;\ p = 0.0000
\end{array}$$

对比构建如下经典线性模型：

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

其OLS估计结果如下：

$$\begin{array}{llll}
\widehat{CM} = & +157.42 & -0.01PGNP \\
(\mathrm{t}) & (15.9893) & (-3.5157) \\
(\mathrm{se}) & (9.8456) & (0.0032) \\
(\mathrm{fitness}) R^2 = 0.1662; \bar{R}^2 = 0.1528 \\
F^* = 12.36;\ p = 0.0008
\end{array}$$

菲利普斯曲线

通货膨胀率（`infrate`，%）与失业率（`unrate`，%）的关系：

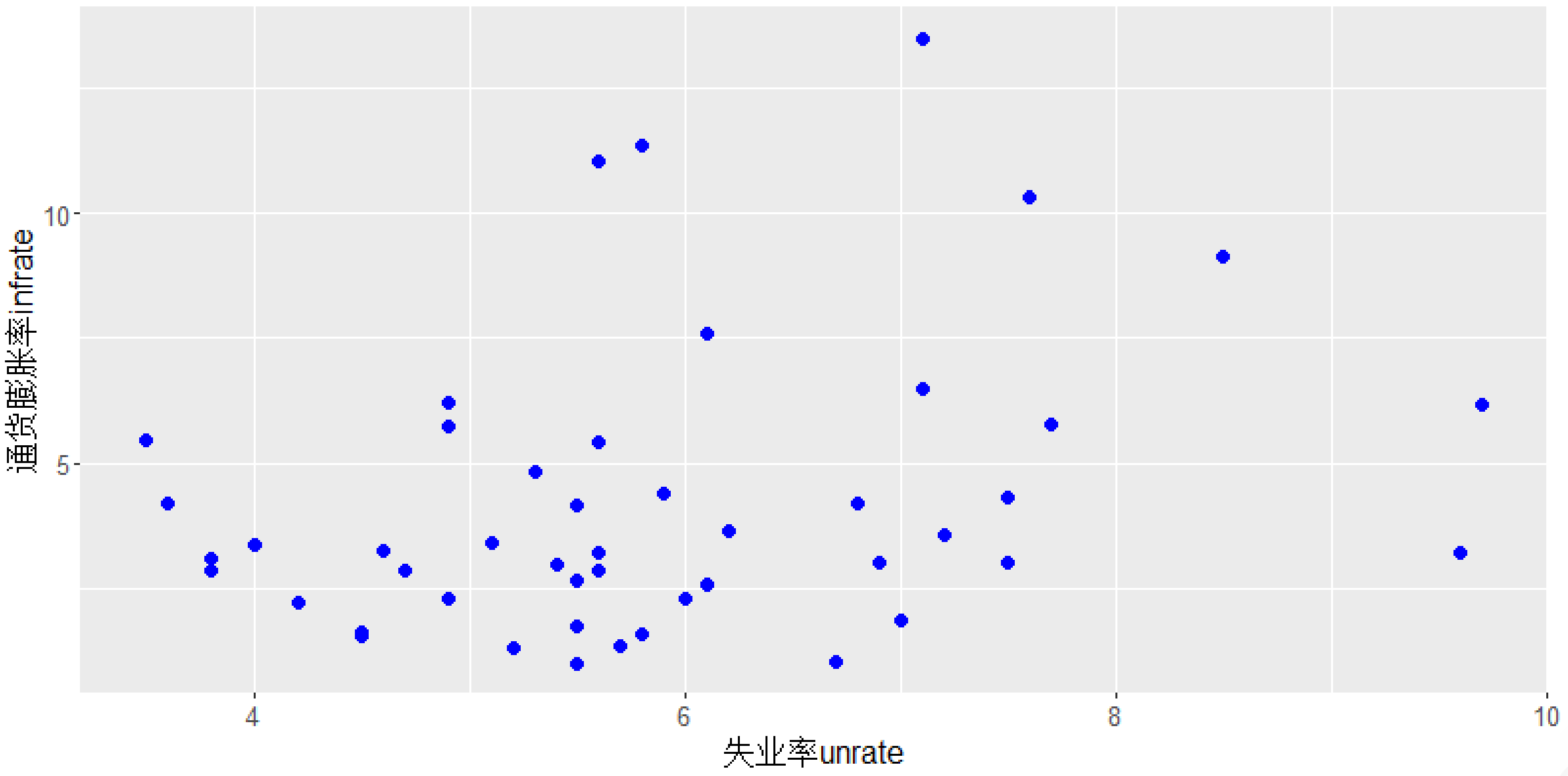
year	infrate	unrate	rep_unrate
1960	1.7182	5.5	0.1818
1961	1.0135	6.7	0.1493
1962	1.0033	5.5	0.1818
1963	1.3245	5.7	0.1754
1964	1.3072	5.2	0.1923

Showing 1 to 5 of 47 entries

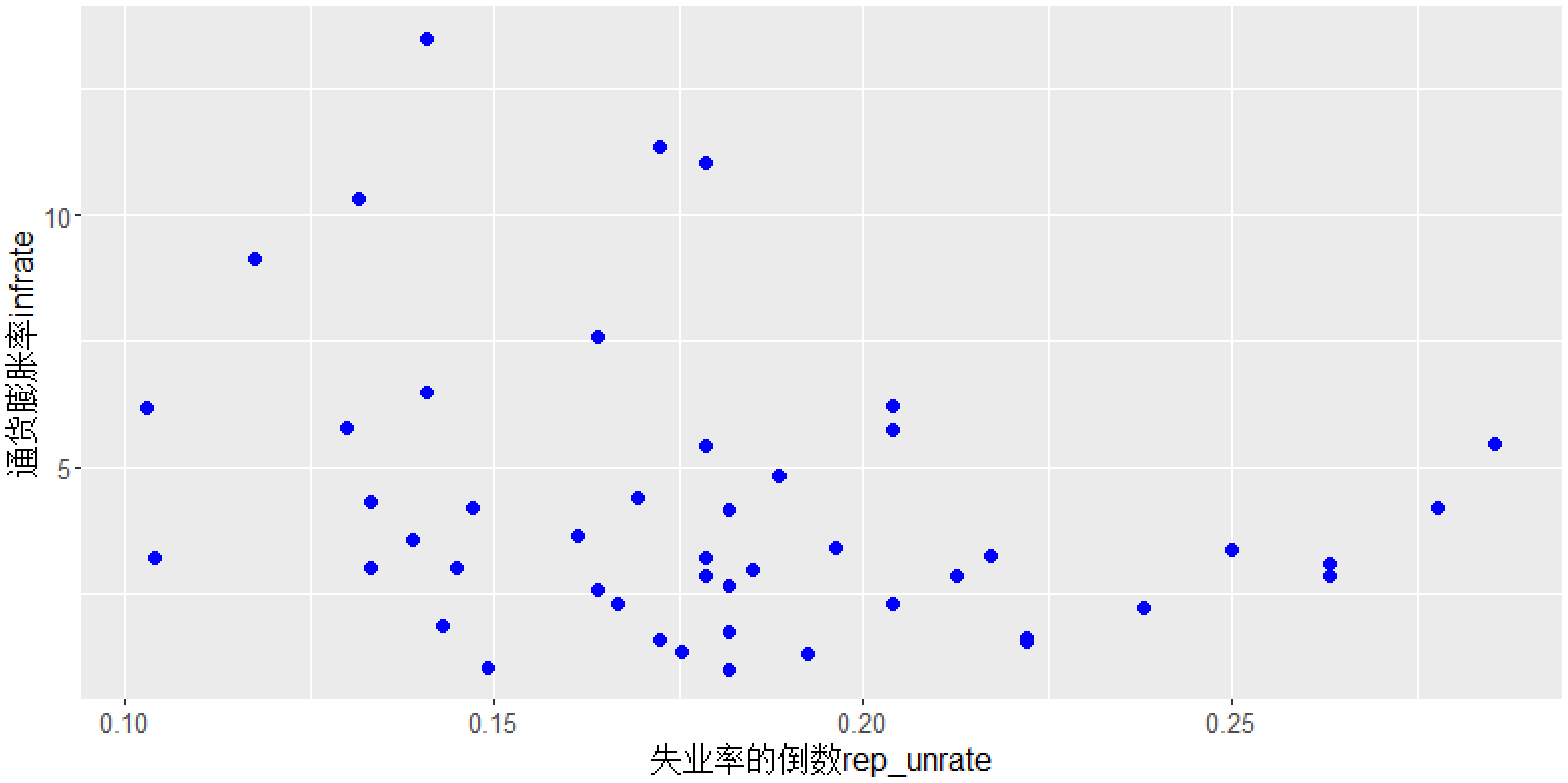
Previous 1 2 3 4 5 … 10 Next

菲利普斯曲线

原始数据作散点图：



把失业率`unrate`取倒数 $1/unrate$再作散点图：



菲利普斯曲线

构建如下倒数模型：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{X_i}\right) + u_i$$

菲利普斯曲线案例倒数模型的OLS估计结果如下：

$$\begin{aligned}
&\widehat{infrate} = +7.37 && -17.37rep_{unrate} \\
&(\text{t}) \quad (4.1723) && (-1.8212) \\
&(\text{se}) \quad (1.7670) && (9.5364) \\
&(\text{fitness}) \quad R^2 = 0.0686; \bar{R}^2 = 0.0479 \\
&\qquad F^* = 3.32; \quad p = 0.0752
\end{aligned}$$

对比构建如下经典线性模型及其OLS估计结果：

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{infrate} = +0.81 && +0.59unrate \\
&(\text{t}) \quad (0.4642) && (2.0377) \\
&(\text{se}) \quad (1.7347) && (0.2874) \\
&(\text{fitness}) \quad R^2 = 0.0845; \bar{R}^2 = 0.0641 \\
&\qquad F^* = 4.15; \quad p = 0.0475
\end{aligned}$$

5.7 函数形式的选择

技巧和经验

选择适当模型时，需要一些技巧和经验：

1. 模型背后的理论(如菲利普斯曲线〉可能给出了一个特定的函数形式。
2. 最好能求出回归子相对回归元的变化率〈即斜率〉和回归子对回归元的弹性(见下页ppt)。
3. 所选模型的系数应该满足一定的先验预期。
4. 有时多个模型都能相当不错地拟合一个给定的数据集。
5. 通常不应该过分强调这个指标
6. 在有些情形中，确定一个特定的函数形式不是那么容易，此时我们或许可以使用所谓的博克斯-考克斯变换(Box-Cox transformations)

计算表一览

模型	方程	斜率	点弹性	平均弹性
models	eq	$\frac{dY}{dX}$	$\frac{dY}{dX} \cdot \frac{X_i}{Y_i}$	$\frac{dY}{dX} \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$
M_1线性模型	$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$	β_2	$\beta_2 X_i / Y_i$	$\beta_2 \bar{X} / \bar{Y}$
M_2过原点模型	$Y_i = \beta_2 X_i + u_i$	β_2	$\beta_2 X_i / Y_i$	$\beta_2 \bar{X} / \bar{Y}$
M_3双对数模型	$ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 ln(X_i) + u_i$	$\beta_2 Y_i / X_i$	β_2	β_2
M_4线性到对数模型	$ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$	$\beta_2 Y_i$	$\beta_2 X_i$	$\beta_2 \bar{X}$
M_5对数到线性模型	$Y_i = \beta_1 + \beta_2 ln(X_i) + u_i$	β_2 / X_i	β_2 / Y_i	$\beta_2 / \bar{Y}$
M_6倒数模型	$Y_i = \beta_1 + \beta_2 / X_i + u_i$	$-\beta_2 / X_i^2$	$-\beta_2 / (X_i Y_i)$	$-\beta_2 / (\bar{X}\bar{Y})$
M_7对数倒数模型	$ln(Y_i) = \beta_1 - \beta_2 / X_i + u_i$	$\beta_2 Y_i / X_i^2$	β_2 / X_i	$\beta_2 / \bar{X}$

本章结束