计量经济学(Econometrics)

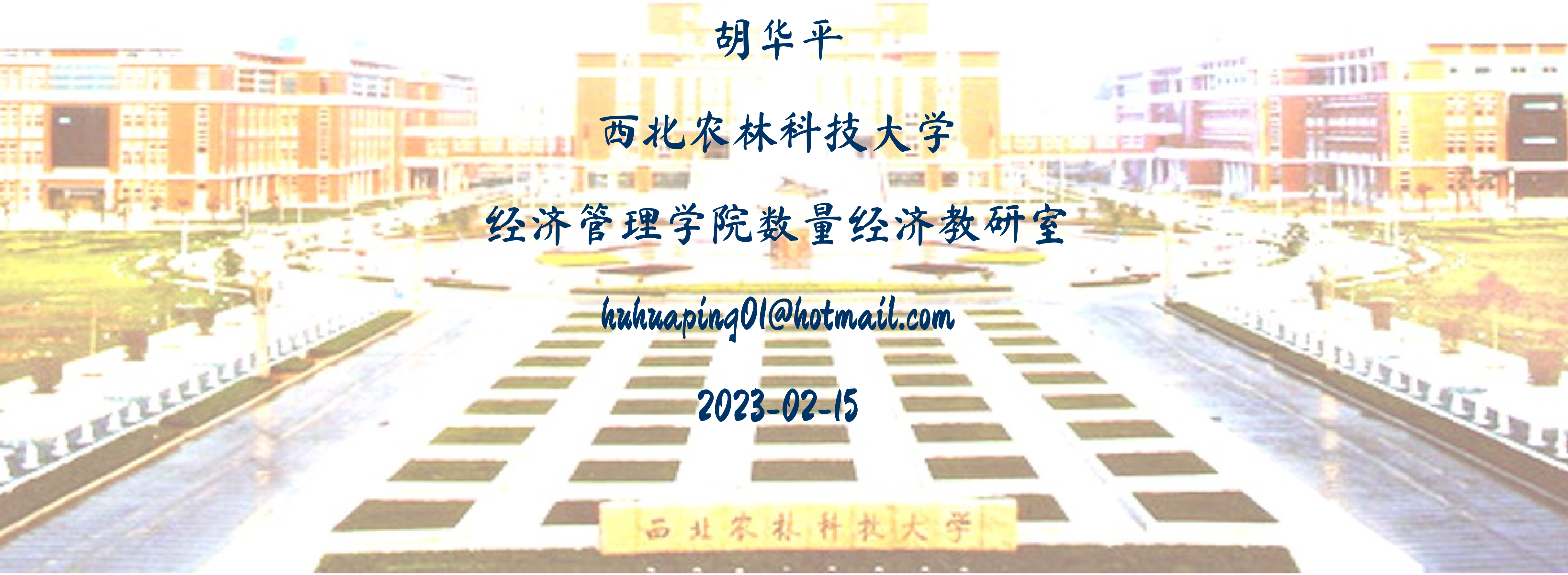
胡华平

西北农林科技大学

经济管理学院数量经济教研室

huhuaping01@hotmail.com

2023-02-15



第6章：多元回归：矩阵部分

6.1k变量模型的矩阵表达

k变量线性回归模型

k变量总体回归模型(PRM)

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

其n个联立方程组为：

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \cdots + \beta_k X_{k1} + u_1 \\
Y_2 &= \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \cdots + \beta_k X_{k2} + u_2 \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
Y_n &= \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \cdots + \beta_k X_{kn} + u_n
\end{aligned}$$

k变量线性回归模型

如果样本数为n，则可以将上述PRM模型表达为矩阵形式：

$$
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}
$$

进一步地，可以得到精简化的PRM矩阵形式：

$$
\underset{(n\times 1)}{y} = \underset{(n\times k)(k\times 1)}{X\beta} \underset{+(n\times 1)}{+u}
$$

或者进一步紧凑表达为：

$$y = X\beta + u$$

其中：

- **向量**（默认为列向量）用加粗体的小写字母表达
- **矩阵**用大写粗体字母表达
- 矩阵或向量的**维度**需要注意标明

6.2 模型假设的矩阵表达

经典线性回归模型假设(N-CLRM)的矩阵表达

进一步地，我们可以用矩阵方法表达正态经典线性回归模型假设（N-CLRM）：

N-CLRM假设1-1：模型是正确设置的。（这里大有学问，也是一切计量分析问题的根本来源）

N-CLRM假设1-2：模型应该是参数线性的。也即模型中**参数**必须线性，变量可以不是线性。

CLRM假设2-1：X是固定的（给定的）或独立于误差项。也即自变量X**不是**随机变量。或者表达为矩阵 X_{n*k}是非随机的，即它由固定数的一个集合构成。

N-CLRM假设2-2：多元回归情形下，自变量X间无**完全共线性**。可记为 $\rho(X) = k$，也即矩阵X为**列满秩**

- 矩阵X是列满秩(full column rank)的，也即其秩等于矩阵的列数。
- 矩阵X的列是线性独立的，即在 X_{ki} 变量之间无完全的线性关系即无**完全共线性**

经典线性回归模型假设(N-CLRM)的矩阵表达

N-CLRM假设3-1：随机干扰项期望为0。可记为 $E(u)=0$

具体地：

$$E(u)=E\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \vdots \\ E(u_n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=0$$

N-CLRM假设3-2/3：随机干扰项同方差且无自相关。可记为 $E(uu')=\sigma^2 I$

在正态性假设下，关于随机干扰项的全部假设可以记为 $u \sim N(0,\sigma^2 I)$

随机干扰项的方差协方差矩阵为：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}-\mathrm{cov}(u) &= E(uu') \\
&= E\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \cdots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \cdots & u_n^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & \cdots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & \cdots & E(u_2u_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & \cdots & E(u_n^2) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

随机干扰项的方差协方差矩阵

如果满足N-CLRM假设，则随机干扰项的方差协方差矩阵进一步可以写成：

$$
var-cov(u)=E(uu')=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \qquad \leftarrow (E(u_i)=0)
$$

$$
=\begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_{12}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma^2 & \cdots & \sigma_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} \qquad \leftarrow [var(u_i)=\sigma^2; cov(u_i,u_j)=0, i\neq j]
$$

$$
=\sigma^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=\sigma^2 I
$$

6.3 OLS估计的矩阵表达

给定如下的样本回归模型（SRM）：

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} + e_i \qquad \text{(SRM)}$$

可以表达为：

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} y = & X\hat{\beta} & +e \\ (n \times 1) & (n \times k)(k \times 1) & +(n \times 1) \end{array}$$

OLS估计的矩阵表达：代数过程

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki})^2$$

$$= e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 = [e_1 e_2 \cdots e_n] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki})(-1) & = 0 \\ \dfrac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = 2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki})(-X_{2i}) & = 0 \\ \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_k} = 2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki})(-X_{ki}) & = 0 \end{cases}$$

OLS估计的矩阵表达：代数过程

正规方程组如下：

$$
\begin{cases}
n\hat{\beta}_1 & +\hat{\beta}_2\sum X_{2i} & +\hat{\beta}_3\sum X_{3i} & +\cdots & +\hat{\beta}_k\sum X_{ki} & =\sum Y_i \\
\hat{\beta}_1\sum X_{2i} & +\hat{\beta}_2\sum X_{2i}^2 & +\hat{\beta}_3\sum X_{2i}X_{3i} & +\cdots & +\hat{\beta}_k\sum X_{2i}X_{ki} & =\sum X_{2i}Y_i \\
\hat{\beta}_1\sum X_{3i} & +\hat{\beta}_2\sum X_{3i}X_{2i} & +\hat{\beta}_3\sum X_{3i}^2 & +\cdots & +\hat{\beta}_k\sum X_{3i}X_{ki} & =\sum X_{3i}Y_i \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\hat{\beta}_1\sum X_{ki} & +\hat{\beta}_2\sum X_{ki}X_{2i} & +\hat{\beta}_3\sum X_{ki}X_{3i} & +\cdots & +\hat{\beta}_k\sum X_{ki}^2 & =\sum X_{ki}Y_i
\end{cases}
$$

OLS估计的矩阵表达：代数过程

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} & \cdots & X_{2i}X_{ki} \\ \sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 & \cdots & \sum X_{3i}X_{ki} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} & \cdots & X_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

从而有：

$$X'X\hat{\beta} = X'y$$

如果矩阵 $X'X$的逆矩阵存在，则两边同时左乘 $(X'X)^{-1}$，得到OLS估计量：

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

OLS估计的矩阵表达：纯矩阵过程

最小二乘方法将求解最小化过程：

$$
\begin{aligned}
Q &= \sum e_i^2 \\
&= e'e && \leftarrow [\, y = X\hat{\beta} + e; \quad e = y - X\hat{\beta} \,] \\
&= (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) && \leftarrow \begin{cases} (\hat{\beta}'X'y)' = y'X\hat{\beta} = \hat{\beta}'X'y \\ (1^*k)\cdot(k^*n)\cdot(n^*1) = (1*1) \end{cases} \\
&= y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}
\end{aligned}
$$

> 提示：标量的转置还是自身！

进一步可以得到：

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}} = 0$$

$$\frac{\partial (y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = 0$$

$$-2X'y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$$-X'y + X'X\hat{\beta} = 0$$

$$X'X\hat{\beta} = X'y$$

如果矩阵 $X'X$ 的逆矩阵存在，则两边同时左乘 $(X'X)^{-1}$，得到OLS估计量：

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

提示：

$$F = AZ, \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = A'$$

$$F = ZA, \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = A$$

$$F = Z'A, \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = A$$

$$F = A'ZB, \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = AB'$$

$$F = A'Z'B, \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = AB'$$

$$F = A'Z'B, \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = BA'$$

$$F = Z'AZ, \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = AZ + A'Z$$

OLS估计的矩阵表达：纯矩阵过程(u的方差)

此外，很容易证明OLS方法下，利用样本回归模型得到的估计量 $\hat{\sigma}^2$，是对总体回归模型参数 σ^2 的无偏估计，也即：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{e'e}{n-k} = \frac{= y'y - \hat{\beta}'X'y}{n-k} \qquad \leftarrow E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned}
e'e &= (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) \\
&= (y' - \hat{\beta}'X')(y - X\hat{\beta}) \\
&= y'y - y'X'y - \hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \\
&= y'y - \hat{\beta}'X'y - (y' - \hat{\beta}'X')X\hat{\beta} \\
&= y'y - \hat{\beta}'X'y - e'X\hat{\beta} \\
&= y'y - \hat{\beta}'X'y - (X'e)'\hat{\beta} \\
&= y'y - \hat{\beta}'X'y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= X\hat{\beta} + e \\
y' &= \hat{\beta}'X' + e' \\
y' - \hat{\beta}'X' &= e'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= X\hat{\beta} + e \\
X'y &= X'X\hat{\beta} + X'e \\
X'y &= X'X(X'X)^{-1}X'y + X'e \\
&= X'y + X'e \\
X'e &= 0
\end{aligned}$$

回归系数的方差协方差矩阵

对于回归系数的OLS估计量 $\hat{\beta}$，进一步讨论其方差和协方差矩阵 $var-cov(\hat{\beta})$，一般记为：

$$
var-cov(\hat{\beta}) = E\left((\hat{\beta}-E(\hat{\beta}))(\hat{\beta}-E(\hat{\beta}))'\right)
$$

$$
= \begin{bmatrix}
var(\hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \cdots & cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\
cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & var(\hat{\beta}_2) & \cdots & cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \cdots & var(\hat{\beta}_k)
\end{bmatrix}
$$

回归系数的方差协方差矩阵

如果满足N-CLRM假设，则回归系数的OLS估计量 $\hat{\beta}$ 的方差和协方差矩阵 $\text{var}-\text{cov}(\hat{\beta})$ 可以进一步写成：

$$
\begin{aligned}
\text{var}-\text{cov}(\hat{\beta}) &\equiv \sigma^2_{\hat{\beta}} \\
&= E\left((\hat{\beta}-E(\hat{\beta}))(\hat{\beta}-E(\hat{\beta}))'\right) \\
&= E\left((\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\right) \\
&= E\left(((X'X)^{-1}X'u)((X'X)^{-1}X'u)'\right) \\
&= E\left((X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}\right) \\
&= (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1} \\
&= (X'X)^{-1}X'\sigma^2 IX(X'X)^{-1} \\
&= \sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} \\
&= \sigma^2(X'X)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'y \\
&= (X'X)^{-1}X'(X\beta+u) \\
&= (X'X)^{-1}X'X\beta+(X'X)^{-1}X'u \\
&= \beta+(X'X)^{-1}X'u
\end{aligned}
$$

$$\hat{\beta}-\beta=(X'X)^{-1}X'u$$

$$(AB)'=B'A'$$

$$
\begin{aligned}
[(X'X)^{-1}]' &= [(X'X)']^{-1} \\
&= (X'X)^{-1}
\end{aligned}
$$

回归系数的方差协方差矩阵

那么，可以很快得到回归系数的OLS估计量 $\hat{\beta}$ 的**样本**方差和协方差矩阵 $S_{ij}^2(\hat{\beta})$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}^2(\hat{\beta}) &= \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1} \\
&= \frac{e'e}{n-k}(X'X)^{-1} \\
&= \frac{y'y-\hat{\beta}'X'y}{n-k}\cdot(X'X)^{-1}
\end{aligned}
$$

OLS估计的性质：BLUE

下面我们将证明高斯-马尔可夫定理(Gauss-Markov Theorem)：在正态经典线性回归模型假设（N-CLRM）下，采用普通最小二乘法（OLS），得到的估计量 $\hat{\beta}$，是真实参数 β 最优的、线性的、无偏估计量（BLUE）。记为：

$$\xrightarrow[\text{N-CLRM}]{\text{OLS}} \hat{\beta} \xrightarrow{\text{BLUE}} \beta$$

因为模型参数的OLS估计为：

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

又因为矩阵 X 为列满秩，也即 $\rho(X) = k$，所以 $\hat{\beta}$ 关于 y 是线性的。

OLS估计的性质：BLUE

根据模型参数OLS估计，容易得到如下过程：

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'y \\
&= (X'X)^{-1}X'(X\beta + u) \\
&= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'u \\
&= \beta + (X'X)^{-1}X'u
\end{aligned}
$$

进一步可证明

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\beta}) &= E(\beta + (X'X)^{-1}X'u) \\
&= E(\beta) + (X'X)^{-1}X'E(u) \\
&= \beta
\end{aligned}
$$

因此，$\hat{\beta}$是参数 β的无偏估计量得证。

OLS估计的性质：BLUE

假设存在用其他方法估计的线性无偏估计量 β^*，则要求 C满足如下条件：

$$CX = 0$$

从而保证如下式子成立：

$$\begin{aligned}
\beta^* &= ((X'X)^{-1}X' + C)\,y \\
&= ((X'X)^{-1}X' + C)\,(X\beta + u) \\
&= \beta + CX\beta + (X'X)^{-1}X'u + Cu \\
&= \beta + (X'X)^{-1}X'u + Cu
\end{aligned}$$

进一步得到：

$$\beta^* - \beta = (X'X)^{-1}X'u + Cu$$

根据方差定义，有：

$$
\begin{aligned}
var-cov(\beta^*) &= E\left((\beta^*-\beta)(\beta^*-\beta)'\right) \\
&= E\left(((X'X)^{-1}X'u+Cu)\left((X'X)^{-1}X'u+Cu\right)'\right) \\
&= \sigma^2(X'X)^{-1}+\sigma^2CC' \\
&= var-cov(\hat{\beta})+\sigma^2CC'
\end{aligned}
$$

其中，我们可以证明 σ^2CC' 是**半正定矩阵**，矩阵对角线元素 ≥ 0，因此有：

$$
var-cov(\beta^*) \geq var-cov(\hat{\beta})
$$

从而表明N-CLRM假设下，OLS方法估计得到的 $\hat{\beta}$，方差最小。

6.4 假设检验的矩阵表达

平方和分解的矩阵表达

对于多元回归模型：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i \qquad \text{(PRM)}$$

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} + e_i \qquad \text{(SRM)}$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} \qquad \text{(SRF)}$$

平方和分解的矩阵表达

通过对 Y_i 的变异及其来源的分解，可以得到：

$$
\begin{aligned}
(Y_i - \bar{Y}_i) &= (\hat{Y}_i - \bar{Y}_i) + (Y_i - \bar{Y}_i) \\
y_i &= \hat{y}_i + e_i \\
\sum y_i^2 &= \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 \\
TSS &= ESS + RSS
\end{aligned}
$$

其中TSS表示总离差平方和，ESS表示回归平法和，RSS表示残差平方和。它们分别可以用矩阵表达为：

$$
\begin{aligned}
TSS &= y'y - n\bar{Y}^2 \\
RSS &= ee' = y'y - \hat{\beta}'X'y \\
ESS &= \hat{\beta}'X'y - n\bar{Y}^2
\end{aligned}
$$

进一步地，可以得到方差分析表（ANOVA）：

变异来源	平方和符号 SS	平方和计算公式	自由度 df	均方和符号 MSS	均方和计算公式
回归平方和	ESS	$\sum \hat{y}_i^2$	k-1	MSS_{ESS}	$=(\hat{\beta}' X' y - n\bar{Y}^2)/(k-1)$
残差平方和	RSS	$\sum e_i^2$	n-k	MSS_{RSS}	$=(y' y - \hat{\beta}' X' y)/(n-k)$
总平方和	TSS	$\sum y_i^2$	n-1	MSS_{TSS}	$=(y' y - n\bar{Y}^2)/(n-1)$

拟合优度的矩阵表达

根据拟合优度的定义，判定系数 R^2 和调整判定系数 $\bar{R}^2$ 的矩阵计算公式为：

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}'X'y - n\bar{Y}^2}{y'y - n\bar{Y}^2}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS/f_{RSS}}{TSS/f_{TSS}} = 1 - \frac{MSS_{RSS}}{MSS_{TSS}} = 1 - \frac{(y'y - \hat{\beta}'X'y)/(k-1)}{(y'y - n\bar{Y}^2)/(n-1)}$$

回归系数显著性检验（t检验）的矩阵方法实现

根据回归系数显著性检验的定义，利用矩阵方法实现t检验的过程如下：

对于多元回归模型

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

$$y = X\beta + u \qquad \text{(PRM)}$$

$$y = X\hat{\beta} + e \qquad \text{(SRM)}$$

回归系数显著性检验（t检验）的矩阵方法实现

在N-CLRM假设下，采用OLS估计方法，可以证明：

$$u \sim N(0, \sigma^2 I)$$

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2 X'X^{-1})$$

从而可以构造t统计量

$$T_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{S_{\hat{\beta}}} \sim t(n-k)$$

$$T_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{c_{ij} \frac{y'y - \hat{\beta}'X'y}{n-k}}}$$

其中 c_{ij} 表示矩阵 $(X'X)^{-1}$ 主对角线第 j

提示：

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

$$\begin{aligned} var-cov(\hat{\beta}) &\equiv \sigma^2_{\hat{\beta}} \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^2_{ij}(\hat{\beta}) &= \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1} \\ &= \frac{e'e}{n-k}(X'X)^{-1} \\ &= \frac{y'y - \hat{\beta}'X'y}{n-k} \cdot (X'X)^{-1} \end{aligned}$$

回归系数显著性检验（t检验）的矩阵方法实现

对于总体回归模型的任一参数 $\beta_j, j \in (1,2,\cdots,k)$提出假设：

$$H_0: \beta_j = 0$$
$$H_1: \beta_j \neq 0$$

根据原假设 H_0，可以得到：

$$t^*_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{S^2_{ij}(\hat{\beta}_{kk})}} = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{c_{ij}\frac{y'y-\hat{\beta}'X'y}{n-k}}}$$

其中 $S^2_{ij}(\hat{\beta}_{kk})$表示，由 $\hat{\beta}$的**样本**方差和协方差矩阵 $S^2_{ij}(\hat{\beta})$的对角线元素组成的列向量，即

$$S^2_{ij}(\hat{\beta}_{kk}) = [s^2_{\hat{\beta}_1}, s^2_{\hat{\beta}_2}, \cdots, s^2_{\hat{\beta}_k}]^T$$

回归系数显著性检验（t检验）的矩阵方法实现

若给定显著性水平 α和自由度 $(n-k)$，很快可以得到t分布的查表t值，也即 $t_{(1-\alpha/2)}(n-k)$。

然后比较样本t统计量 $t^*_{\hat{\beta}}$与理论t分布查的表t值 $(t_{(1-\alpha/2)}(n-k))$的关系。根据如下法则做出参数 β_2的显著性检验结论：

- 如果列向量 $t^*_{\hat{\beta}}$的第 k个元素 $t^*_{\hat{\beta}_k} > t_{(1-\alpha/2)}(n-k)$，则表明参数 β_k的t检验在 α水平下是**显著**的，也即显著地拒绝 $H_0: \beta_k = 0$，从而接受 $H_1: \beta_k \neq 0$。
- 如果列向量 $t^*_{\hat{\beta}}$的第 k个元素 $t^*_{\hat{\beta}_k} \leq t_{(1-\alpha/2)}(n-k)$，则表明参数 β_k的t检验在 α水平下是**不显著**的，也即不能显著地拒绝 $H_0: \beta_k = 0$，从而只能暂时接受 $H_0: \beta_k = 0$。

模型整体显著性检验（F检验）的矩阵方法实现

对于多元回归模型

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i && \text{(U-PRM)} \\
Y_i &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} + e_i && \text{(U-SRM)} \\
y &= X\beta + u && \text{(PRM)} \\
y &= X\hat{\beta} + e && \text{(SRM)}
\end{aligned}
$$

我们称总体回归模型和对应的样本回归模型为**无约束模型**（unrestricted model）。

对于总体回归模型的斜率参数 $\beta_j, j \in (2, \cdots, k)$提出如下**联合假设**（joint hypothesis）：

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0 \\
H_1 &: \beta_j \text{ not all } 0, \ \text{for } j \in (2, \cdots, k)
\end{aligned}
$$

模型整体显著性检验（F检验）的矩阵方法实现

在原假设 $H_0: \beta_2=\beta_3=\cdots=\beta_k=0$下，我们可以得到如下模型：

$$Y_i=\beta_1+u_i \qquad \text{(R-PRM)}$$

$$Y_i=\hat{\beta}_1+e_i \qquad \text{(R-SRM)}$$

此时，我们称总体回归模型和对应的样本回归模型为**受约束模型**（restricted model）。在备择假设 $H_1: \beta_j$不全为0， $j\in(2,\cdots,k)$下，我们可以得到该假设下的一种特殊回归模型（如 $\beta_j\neq 0, j\in(2,\cdots,k)$），也即无约束总体回归模型和无约束样本回归模型。

受约束模型：一般也称为参数约束回归模型（restricted model），是指总体参数满足某种约束条件的一类回归模型。

无约束模型：一般也称为参数无约束回归模型（unrestricted model），是指总体参数没有被指定满足某种约束条件的一类回归模型。

模型整体显著性检验（F检验）的矩阵方法实现

根据回归系数显著性检验的定义，利用矩阵方法实现F检验的过程如下：

在N-CLRM假设下，采用OLS估计方法，容易证明：

对于无约束总体回归模型有

$$
\begin{aligned}
u_i &\sim i.i.d\, N(0, \sigma^2) \\
Y_i &\sim i.i.d\, N(\beta_1 + \beta_2 X_i + \cdots + \beta_k X_i, \sigma^2) \\
RSS_U &= \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \sim \chi^2(n-k)
\end{aligned}
$$

对于受约束总体回归模型有

$$
\begin{aligned}
u_i &\sim i.i.d\, N(0, \sigma^2) \\
Y_i &\sim i.i.d\, N(\beta_1, \sigma^2) \\
RSS_R &= \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \sim \chi^2(n-1)
\end{aligned}
$$

模型整体显著性检验（F检验）的矩阵方法实现

进一步地可以构造得到随机变量 $\tilde{F}$，它将服从如下的F分布：

$$\tilde{F} = \frac{(RSS_R - RSS_U)/(k-1)}{RSS_U/(n-k)} = \frac{ESS_U/df_{ESS_U}}{RSS_U/df_{RSS_U}} \sim F(df_{ESS}, df_{RSS})$$

模型整体显著性检验（F检验）的矩阵方法实现

变异来源	平方和符号 SS	平方和计算公式	自由度 df	均方和符号 MSS	均方和计算公式
回归平方和	ESS	$\sum \hat{y}_i^2$	k-1	MSS_{ESS}	$=(\hat{\beta}'X'y-n\bar{Y}^2)/(k-1)$
残差平方和	RSS	$\sum e_i^2$	n-k	MSS_{RSS}	$=(y'y-\hat{\beta}'X'y)/(n-k)$
总平方和	TSS	$\sum y_i^2$	n-1	MSS_{TSS}	$=(y'y-n\bar{Y}^2)/(n-1)$

模型整体显著性检验（F检验）的矩阵方法实现

基于原假设 $H_0: \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$（也即斜率系数全部等于0，或者说约束模型的 $RSS_R = 0$），然后根据ANOVA分析表，我们可以计算得到一个样本F统计量（F^*）

$$F^* = \frac{ESS_U/df_{ESS_U}}{RSS_U/df_{RSS_U}} = \frac{(\hat{\beta}'X'y - n\bar{Y}^2)/(k-1)}{(y'y - \hat{\beta}'X'y)/(n-k)}$$

此外，我们还可以通过拟合优度 R^2，计算得到 F^*

$$F^* = \frac{ESS_U/df_{ESS_U}}{RSS_U/df_{RSS_U}} = \frac{R_U^2/(k-1)}{(1-R_U^2)/(n-k)}$$

模型整体显著性检验（F检验）的矩阵方法实现

若给定显著性水平 α和样本数 (n)，很快可以得到F分布的查表F值，也即 $F_{(1-\alpha)}(k-1,n-k)$,然后比较其与样本F统计量（F^*）的关系。

根据如下法则做出总体回归模型整体显著性检验结论：

- 如果 $F^* > F_{(1-\alpha)}(k-1,n-k)$，则表明总体回归模型的F检验在 α水平下是**显著**的，也即显著地拒绝 $H_0:\beta_2=\beta_3=\cdots=\beta_k=0$，从而接受 $H_1:\beta_j$不全为0， $j\in(2,\cdots,k)$，认为模型整体统计上是有意义的！
- 如果 $F^* \leq F_{(1-\alpha)}(k-1,n-k)$，则表明总体回归模型的F检验在 α水平下是**不显著**的，也即不能显著地拒绝 $H_0:\beta_2=\beta_3=\cdots=\beta_k=0$，从而只能暂时接受 $H_0:\beta_2=0$，认为模型整体在统计上是无意义的！

6.5 模型预测的矩阵表达

样本外预测的矩阵方法实现

根据一元线性回归样本外预测的知识内容，下面将用矩阵方法实现：

- 样本外**均值预测** $E(Y_0|X_0)$
- 样本外**个值预测** $(Y_0|X_0)$。

其中，给定样本外数据 $X_0 = [1, X_{20}, X_{30}, \cdots, X_{k0}]$（矩阵）。

对于多元回归模型：

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i \\
Y_i &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} + e_i \\
y &= X\beta + u \\
y &= X\hat{\beta} + e \\
\hat{y} &= X\hat{\beta} \\
\hat{Y}_0 &= X_0\hat{\beta}
\end{aligned}
$$

样本外预测的矩阵方法实现：均值预测

对于样本外均值预测 $E(Y_0|X_0)$，矩阵实现步骤如下：

在N-CLRM假设下，已知 $\hat{Y}_0$的期望和**真实方差**为：

$$
\begin{aligned}
E(\hat{Y}_0) &= E(X_0\hat{\beta}) = X_0\beta = E(Y_0) \\
var(\hat{Y}_0) &= E(X_0\hat{\beta} - X_0\beta)^2 && \leftarrow (var.\ def) \\
&= E\,(X_0(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'X_0') && \leftarrow (trans.) \\
&= X_0E\,((\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)')\,X_0' && \leftarrow def.\quad var(\hat{\beta}) \\
&= \sigma^2X_0(X'X)^{-1}X_0' && \leftarrow var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}
\end{aligned}
$$

同时，$\hat{Y}_0$的**样本方差**为：

$$
S^2_{\hat{Y}_0} = \hat{\sigma}^2X_0(X'X)^{-1}X_0'
$$

样本外预测的矩阵方法实现：均值预测

因此 $\hat{Y}_0$服从如下正态分布：

$$\hat{Y}_0 \sim N(\mu_{\hat{Y}_0}, \sigma^2_{\hat{Y}_0})$$

$$\hat{Y}_0 \sim N\left(E(Y_0|X_0), \sigma^2 X_0(X'X)^{-1}X_0'\right)$$

因此可以构造t统计量：

$$t_{\hat{Y}_0} = \frac{\hat{Y}_0 - E(Y|X_0)}{S_{\hat{Y}_0}} \sim t(n-k)$$

其中：

$$S_{\hat{Y}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 X_0(X'X)^{-1}X_0'}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{(n-k)}$$

样本外预测的矩阵方法实现：均值预测

给定显著性水平 α的情况下，可以查表得到理论t值 $t_{1-\alpha/2}(n-k)$，从而可以计算得到均值预测的置信区间：

$$\hat{Y}_0 - t_{1-\alpha/2}(n-k)\cdot S_{\hat{Y}_0} \le E(Y|X_0) \le \hat{Y}_0 + t_{1-\alpha/2}(n-k)\cdot S_{\hat{Y}_0}$$

其中：

$$S_{\hat{Y}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 X_0(X'X)^{-1}X_0'} \quad \leftarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{ee'}{(n-k)}$$

$$\hat{Y}_0 = X_0\hat{\beta}$$

样本外预测的矩阵方法实现：个值预测

对于多元线性回归模型，样本外个值预测 $(Y_0|X_0)$的矩阵实现步骤如下：

因为有： $e_0 = Y_0 - \hat{Y}_0$

所以 e_0的期望为：

$$
\begin{aligned}
E(e_0) &= E(Y_0 - \hat{Y}_0) \\
&= E(X_0\beta + u_0 - X_0\hat{\beta}) \\
&= E\,(u_0 - X_0(\hat{\beta} - \beta)) \\
&= E\,(u_0 - X_0(X'X)^{-1}X'u) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

提示：

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'y \\
&= (X'X)^{-1}X'(X\beta + u) \\
&= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'u \\
&= \beta + (X'X)^{-1}X'u
\end{aligned}
$$

$$
\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'u
$$

样本外预测的矩阵方法实现：个值预测

同时，e_0的**真实方差**为：

$$
\begin{aligned}
var(e_0) &= E(Y_0 - \hat{Y}_0)^2 \\
&= E(e_0^2) \\
&= E(u_0 - X_0(X'X)^{-1}X'u)^2 \\
&= \sigma^2 (1 + X_0(X'X)^{-1}X_0')
\end{aligned}
$$

进一步地，e_0服从如下正态分布：

$$
\begin{aligned}
e_0 &\sim N(\mu_{e_0}, \sigma_{e_0}^2) \\
e_0 &\sim N(0, \sigma^2 (1 + X_0(X'X)^{-1}X_0'))
\end{aligned}
$$

而且 e_0的**样本方差**为：：

$$
S^2_{Y_0 - \hat{Y}_0} \equiv S^2_{e_0} = \hat{\sigma}^2 (1 + X_0(X'X)^{-1}X_0') \qquad \leftarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{ee'}{(n-k)}
$$

样本外预测的矩阵方法实现：个值预测

因此可以构造t统计量：

$$T = \frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{S_{e_0}} \sim t(n-k)$$

给定显著性水平 α的情况下，可以查表得到理论t值 $t_{1-\alpha/2}(n-k)$，从而可以计算得到均值预测的置信区间：

$$\hat{Y}_0 - t_{1-\alpha/2}(n-k) \cdot S_{Y_0-\hat{Y}_0} \leq (Y_0|X_0) \leq \hat{Y}_0 + t_{1-\alpha/2}(n-k) \cdot S_{Y_0-\hat{Y}_0}$$

其中：

$$S_{Y_0-\hat{Y}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left(1 + (X_0(X'X)^{-1}X_0')\right)} \qquad \leftarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{ee'}{(n-k)}$$

$$\hat{Y}_0 = X_0\hat{\beta}$$

6.6 矩阵方法总结（示例）

矩阵方法总结：消费支出案例（数据）

Year	Y	one	X2	X3
1956	1673	1	1839	1
1957	1688	1	1844	2
1958	1666	1	1831	3
1959	1735	1	1881	4
1960	1749	1	1883	5

Showing 1 to 5 of 15 entries

Previous 1 2 3 Next

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + e_i$$

- Y_i表示人均私人消费支出
- X_{2i}表示人均可支配收入
- X_{3i}表示时间 $t \in 1, 2, \cdots n$

矩阵方法总结：消费支出案例（软件报告）

我们可以构建如下的回归模型：

$$Y = +\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X2 + \hat{\beta}_3 X3 + e_i$$

统计软件自动计算结果整理如下（便于后续手动计算的比较）：

$$
\begin{array}{lllll}
\hat{Y} = & +300.29 & +0.74X2 & +8.04X3 \\
(t) & (3.8342) & (15.6096) & (2.6960) \\
(se) & (78.3176) & (0.0475) & (2.9835) \\
(fitness) & R^2 = 0.9976; & \bar{R}^2 = 0.9972 & \\
 & F^* = 2513.52; & p = 0.0000 &
\end{array}
$$

矩阵方法总结：消费支出案例（软件报告）

利用R软件给出更为详细的分析报告如下（便于后续手动计算的比较）：

```
Call:
lm(formula = mod_mat, data = data_PCE)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-22.380  -6.141   3.414   6.686  22.183 

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 300.28626   78.31763   3.834  0.00238 ** 
X2            0.74198    0.04753  15.610 2.46e-09 ***
X3            8.04356    2.98355   2.696  0.01945 *  
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 12.84 on 12 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9976,    Adjusted R-squared:  0.9972 
F-statistic:  2514 on 2 and 12 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

矩阵方法总结：消费支出案例（回归系数）

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1839 & 1 \\ 1 & 1844 & 2 \\ 1 & 1831 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2595 & 15 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1673 \\ 1688 \\ 1666 \\ \cdots \\ 2324 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 15 & 31895 & 120 \\ 31895 & 68922513 & 272144 \\ 120 & 272144 & 1240 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 37.2328 & -0.0225 & 1.3367 \\ -0.0225 & 0 & -8e-04 \\ 1.3367 & -8e-04 & 0.054 \end{bmatrix}$$

$$X'y = \begin{bmatrix} 29135 \\ 62905821 \\ 247934 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = \begin{bmatrix} 300.2863 \\ 0.742 \\ 8.0436 \end{bmatrix}$$

求出回归标准误差方差

可以根据如下公式计算回归误差方差 $\hat{\sigma}^2$：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{e'e}{n-k} = \frac{= y'y - \hat{\beta}'X'y}{n-k}$$

$$y'y = [\,1673 \quad 1688 \quad 1666 \quad \cdots \quad 2324\,]\begin{bmatrix}1673\\1688\\1666\\\cdots\\2324\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}'X'y = [\,300.2863 \quad 0.742 \quad 8.0436\,]\begin{bmatrix}29135\\62905821\\247934\end{bmatrix}$$

求出回归标准误差方差

因此有：

$$RSS = \sum e_i^2 = e'e = y'y - \hat{\beta}'X'y$$
$$= 57420003 - 57418026.1446 = 1976.8554$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n-k}$$
$$= \frac{1976.8554}{12} = 164.7379$$

求出回归系数的样本方差-协方差矩阵

根据如下公式：

$$
\begin{aligned}
S_{ij}^2(\hat{\beta}) &= \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1} \\
&= \frac{e'e}{n-k}(X'X)^{-1} \\
&= \frac{y'y-\hat{\beta}'X'y}{n-k}\cdot (X'X)^{-1}
\end{aligned}
$$

可以计算得到回归系数的方差协方差矩阵为：

$$
S_{ij}^2(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 6133.6505 & -3.7079 & 220.2063 \\ -3.7079 & 0.0023 & -0.1371 \\ 220.2063 & -0.1371 & 8.9015 \end{bmatrix}
$$

回归系数的显著性检验（t检验）

```
SS_b <- matrix(diag(mat_cov_b), byrow = F)
S_b <- sqrt(SS_b)
```

回归系数的方差协方差矩阵中：

对角线元素即为回归系数的样本方差 $S^2_{\hat{\beta}}$：

$$S^2_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} 6133.6505 \\ 0.0023 \\ 8.9015 \end{bmatrix}$$

则回归系数的样本标准差 $S_{\hat{\beta}}$ 为：

$$S_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} 78.3176 \\ 0.0475 \\ 2.9835 \end{bmatrix}$$

回归系数的显著性检验（t检验）

根据原假设 H_0，可以得到：

$$t^*_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{S^2_{ij}(\hat{\beta}_{kk})}} = \frac{\hat{\beta}}{S_{\hat{\beta}}}$$

计算结果为：

$$t^*_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} 3.8342 \\ 15.6096 \\ 2.696 \end{bmatrix}$$

给定 $\alpha = 0.05, k = 3, n = 15$，我们可以查表得 $t_{1-\alpha/2}(n-k) = t_{0.975}(13) = 2.1788$。

因此表明全部回归系数的t检验的都是显著的。

平方和分解和ANOVA分析表

$$ESS == y'y - \hat{\beta}'X'y = 1976.8554$$

$$RSS = \hat{\beta}'X'y - n\overline{Y}^2 = 1976.8554$$

$$TSS = y'y - n\overline{Y}^2 = 830121.3333$$

变异来源	平方和符号SS	平方和计算公式	自由度df	均方和符号MSS	均方和计算公式
回归平方和	ESS	$\sum \hat{y}_i^2$	2	MSS_{ESS}	$\hat{\beta}'X'y - n\overline{Y}^2$ =828144.4779
残差平方和	RSS	$\sum e_i^2$	12	MSS_{RSS}	$y'y - \hat{\beta}'X'y$=1976.8554
总平方和	TSS	$\sum y_i^2$	14	MSS_{TSS}	$y'y - n\overline{Y}^2$=830121.3333

判定系数和调整判定系数

根据判定系数公式可以计算得到：

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=\frac{\hat{\beta}'X'y-n\bar{Y}^2}{y'y-n\bar{Y}^2}=\frac{828144.4779}{830121.3333}=0.9976$$

根据调整判定系数公式可以计算得到：

$$\bar{R}^2=\frac{ESS}{TSS}=1-\frac{(y'y-\hat{\beta}'X'y)/(n-k)}{(y'y-n\bar{Y}^2)/(n-1)}=1-\frac{1976.8554/12}{830121.3333/14}=0.9972$$

进行F检验

首先计算得到方差分析表（ANOVA）：

变异来源	平方和符号SS	平方和计算公式	自由度df	均方和符号MSS	均方和计算公式
回归平方和	ESS	$\sum \hat{y}_i^2$	2	MSS_{ESS}	$\hat{\beta}'X'y - n\bar{Y}^2$ =828144.4779
残差平方和	RSS	$\sum e_i^2$	12	MSS_{RSS}	$y'y - \hat{\beta}'X'y$=1976.8554
总平方和	TSS	$\sum y_i^2$	14	MSS_{TSS}	$y'y - n\bar{Y}^2$=830121.3333

进行F检验

根据方差分析表ANOVA和样本F统计量计算公式，可以得到：

$$F^* = \frac{ESS_U/df_{ESS_U}}{RSS_U/df_{RSS_U}} = \frac{(\hat{\beta}'X'y - n\bar{Y}^2)/(k-1)}{(y'y - \hat{\beta}'X'y)/(n-k)} = \frac{828144.4779/2}{1976.8554/12} = 2513.5207$$

得到显著性检验的判断结论。因为 $F^* = 2513.5207$ 大于 $F_{1-\alpha}(k-1, n-k) = F_{0.95}$ (2,12)=3.8853，所以模型整体显著性的F检验结果**显著**。

进行样本外预测

给定样本外 X_0矩阵为：

$$X_0 = [1 \quad 2610 \quad 16]$$

已经求得斜率向量为：

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 300.2863 \\ 0.742 \\ 8.0436 \end{bmatrix}$$

则线性拟合值为：

$$\hat{Y}_0 = X_0\hat{\beta} = 2365.553$$

进行样本外预测（均值预测）

已知：

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix} 37.2328 & -0.0225 & 1.3367 \\ -0.0225 & 0 & -8e-04 \\ 1.3367 & -8e-04 & 0.054 \end{bmatrix}$$

所以有：

$$X_0(X'X)^{-1}X_0'=0.2953$$

因此进一步得到：

$$S_{\hat{Y}_0}=\sqrt{\hat{\sigma}^2X_0(X'X)^{-1}X_0'}=\sqrt{164.7379*0.2953}=6.9744$$

进行样本外预测（均值预测）

又因为给定 $\alpha=0.05$时可以查到理论t值 $t_{1-\alpha/2}(n-k)=t_{0.975}(12)=2.1788$

因此可以计算得到均值预测的 $1-\alpha$置信区间为：

$$\hat{Y}_0-t_{1-\alpha/2}(n-k)\cdot S_{\hat{Y}_0}\le E(Y|X_0)\le \hat{Y}_0+t_{1-\alpha/2}(n-k)\cdot S_{\hat{Y}_0}$$
$$2365.5532-2.1788*6.9744\le E(Y|X_0)\le 2365.5532+2.1788*6.9744$$
$$2350.3573\le E(Y|X_0)\le 2380.7492$$

进行样本外预测（个值预测）

已知：

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 37.2328 & -0.0225 & 1.3367 \\ -0.0225 & 0 & -8e-04 \\ 1.3367 & -8e-04 & 0.054 \end{bmatrix}$$

所以有：

$$X_0(X'X)^{-1}X_0' = 0.2953$$

因此进一步得到：

$$S_{e0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2(1 + X_0(X'X)^{-1}X_0')} = \sqrt{164.7379 * (1 + 0.2953)} = 7.0458$$

进行样本外预测（个值预测）

又因为给定 $\alpha = 0.05$时可以查到理论t值 $t_{1-\alpha/2}(n-k) = t_{0.975}(12)=2.1788$

因此可以计算得到均值预测的 $1-\alpha$置信区间为：

$$\hat{Y}_0 - t_{1-\alpha/2}(n-k)\cdot S_{e0} \leq (Y_0|X_0) \leq \hat{Y}_0 + t_{1-\alpha/2}(n-k)\cdot S_{e0}$$
$$2365.5532 - 2.1788 * 7.0458 \leq (Y_0|X_0) \leq 2365.5532 + 2.1788 * 7.0458$$
$$2350.2019 \leq (Y_0|X_0) \leq 2380.9046$$

本章结束