计量经济学(Econometrics)

胡华平

西北农林科技大学

经济管理学院数量经济教研室

huhuaping01@hotmail.com

2023-02-15

第9章：放宽基本假设：序列自相关性

9.1 序列自相关性的定义和来源

自相关的概念与内涵

滞后变量（lag variable）：对某个时间序列变量进行**滞后变换**后得到的新变量。

例如对时间序列变量 $Z_{2,t}$ $(t \in 1,2,\cdots,T)$进行滞后变换可以得到多个**滞后变量**：$Z_{2,t-1};Z_{2,t-2};\cdots;Z_{2,t-p};\cdots;Z_{2,t-(T-1)}$。

自相关的概念与内涵

时间序列数据的两种相关关系：

- **序列相关**（serial correlation）：两个不同时间序列变量之间（或/及它们的滞后变量之间）的（线性）相关关系。

$$
\begin{aligned}
&cor(Z_{2,t}, Z_{3,t}) \\
&cor(Z_{2,t}, Z_{3,t-1}); \quad \cdots; \quad cor(Z_{2,t}, Z_{3,t-p}). \quad p \in 1, 2, \cdots, T-1 \\
&cor(Z_{2,t-1}, Z_{3,t}); \quad \cdots; \quad cor(Z_{2,t-p}, Z_{3,t}). \quad p \in 1, 2, \cdots, T-1
\end{aligned}
$$

- **自相关**（autocorrelation）：某个时间序列变量与其自身滞后变量的（线性）相关关系。

$$
cor(Z_{2,t}, Z_{2,t-1}); \quad cor(Z_{2,t}, Z_{2,t-2}); \quad \cdots; \quad cor(Z_{2,t}, Z_{2,t-p}). \quad p \in 1, 2, \cdots, T-1
$$

自相关的概念与内涵

k变量总体回归模型(PRM)

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + u_t$$

经典线性回归模型假定（CLRM）在随机干扰项 u_i之间不存在**自相关**，也即：

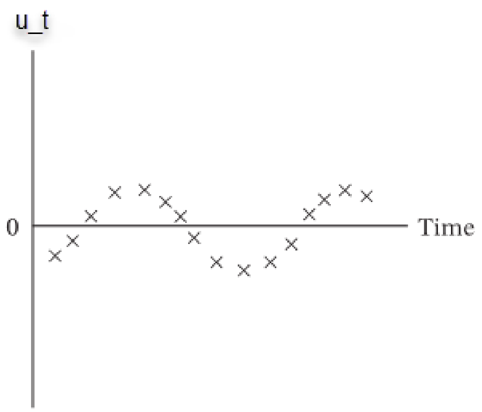
$$E(u_t u_{t-p}) = 0; \quad p \in 1, 2, \cdots, T-1$$

如果随机干扰项 u_i出现自相关时，则意味着**违背**了CLRM假设（其他假设仍旧成立）：

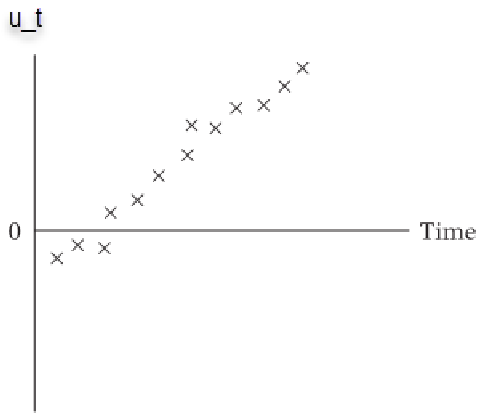
$$E(u_t u_{t-p}) \neq 0; \quad p \in 1, 2, \cdots, T-1$$

自相关的概念与内涵（模拟演示）

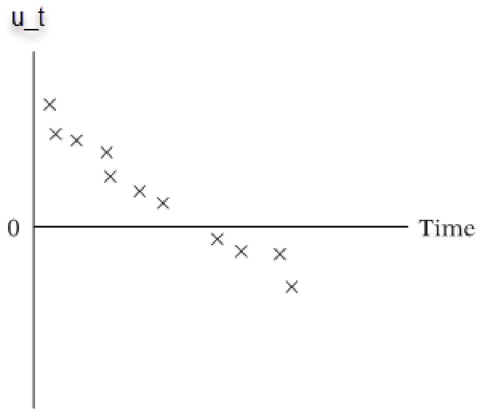
随机干扰项 u_t 的几种自相关模式和非自相关模式可以表示为：



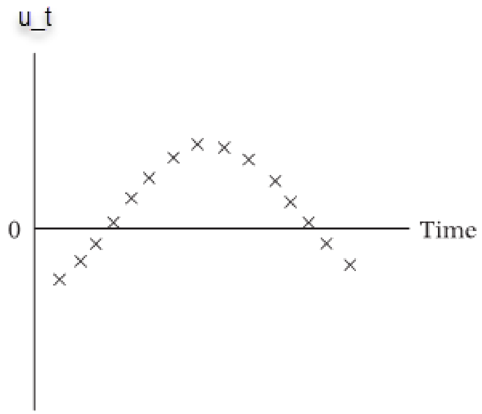
(a)



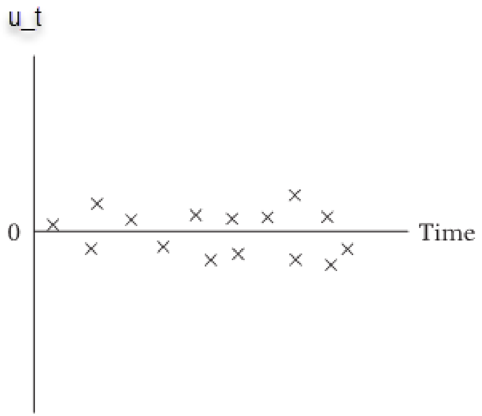
(b)



(c)



(d)



(e)

产生自相关的原因I

产生自相关的原因1：时间惯性的普遍存在。大多数经济时间序列变量都有**时间惯性**。

- GNP、价格指数、生产、就业和失业等时间序列变量都呈现出商业循环。

产生自相关的原因2

产生自相关的原因2-1：模型设定偏误——应含而未含某些重要变量（excluded variables）。

- 以牛肉需求模型为例。其中：Y_t表示牛肉需求量；X_{2t}表示牛肉价格；X_{3t}表示消费者收入；X_{4t}表示猪肉价格。

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t$$

- 如果我们把上述模型做成如下情形，在**猪肉价格**影响**牛肉消费**的情形下，新模型的残差 v_t将表现出某种系统的模式。也即模型出现了错误设定，导致随机干扰项不满足CLRM假设。

$$Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + \alpha_3 X_{3t} + v_t$$

产生自相关的原因2

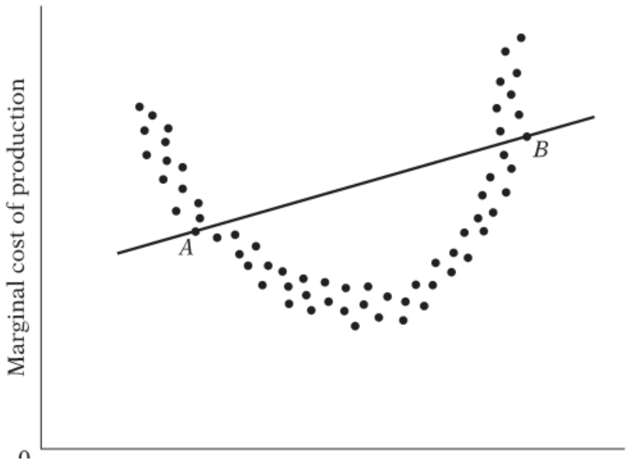
产生自相关的原因2-2：模型设定偏误——不正确的函数形式。

- 以企业边际成本-产出模型为例。如果“真实”的边际成本决定模型为：

$$Cost_t = \beta_1 + \beta_2 Output_t + \beta_3 Output_t^2 + u_t$$

- 如果我们把上述模型做成如下情形（模型错误设定），由于模型函数形式的错误使用，残差 v_t将反映出自相关性质（因为 $v_t = \beta_3 Output_t^2 + u_t$）。

$$Cost_t = \alpha_1 + \alpha_2 Output_t + v_t$$



产生自相关的原因3

产生自相关的原因3：蛛网现象（Cobweb phenomenon）的存在。

- 以农产品供给模型为例。如果在 当期（t期）价格 P_t的低于前一期（t-1期）价格 P_{t-1}，那么在**未来1期**（t+1期），农户将会决定生产更少的农产品。如此往复决策，将会使得形成蛛网生产和价格模式。

$$Supply_t = \beta_1 + \beta_2 P_{t-1} + u_t$$

产生自相关的原因4

产生自相关的原因4：滞后效应的普遍存在。

- 以消费支出模型为例。当期消费（t期）还会受到前期（t-1期）消费水平的影响。这种带有因变量的滞后变量 $Consumption_{t-1}$ 的回归也叫**自回归**（auto-regression）。

$$Consumption_t = \beta_1 + \beta_2 Income_t + \beta_3 Consumption_{t-1} + u_t$$

产生自相关的原因5

产生自相关的原因5：数据的“**编造**”。

-从月度数据计算得出季度数据，会减小波动，引进匀滑作用，使扰动项出现系统性模式

- 数据的内插（interpolation）：人口普查10年一次
- 数据的外推（extrapolation）

产生自相关的原因6

产生自相关的原因6： 数据的“**变换**”。

- 例如，有时候我们可以构造如下的**一阶差分模型**，这类模型也被称为**动态回归模型**（Dynamic regression）。

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \\
Y_{t-1} &= \beta_1 + \beta_2 X_{t-1} + u_{t-1} \\
\Delta Y_t &= \beta_2 \Delta X_t + \Delta u_t \\
\Delta Y_t &= \beta_2 \Delta X_t + v_t
\end{aligned}
$$

- 如果 Y_t和 X_t都是已经经过了对数化处理，则一阶差分变换后的模型中随机干扰项 v_t将会出现自相关模式。

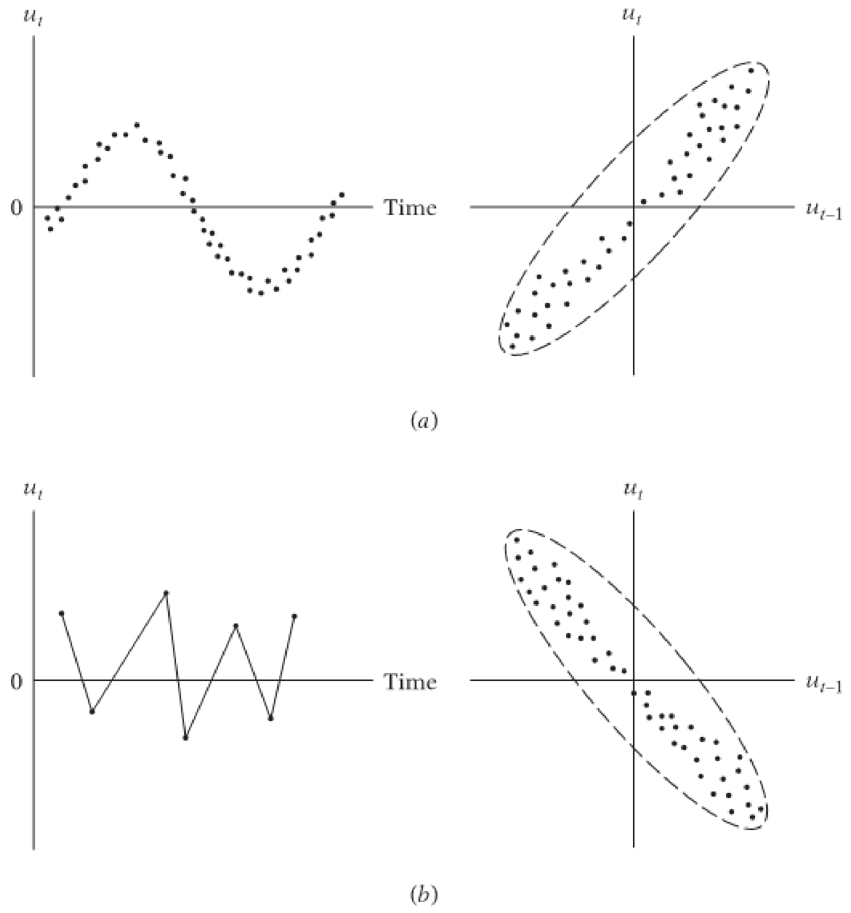
产生自相关的原因7

产生自相关的原因7：时间序列**非平稳性**的广泛存在。

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

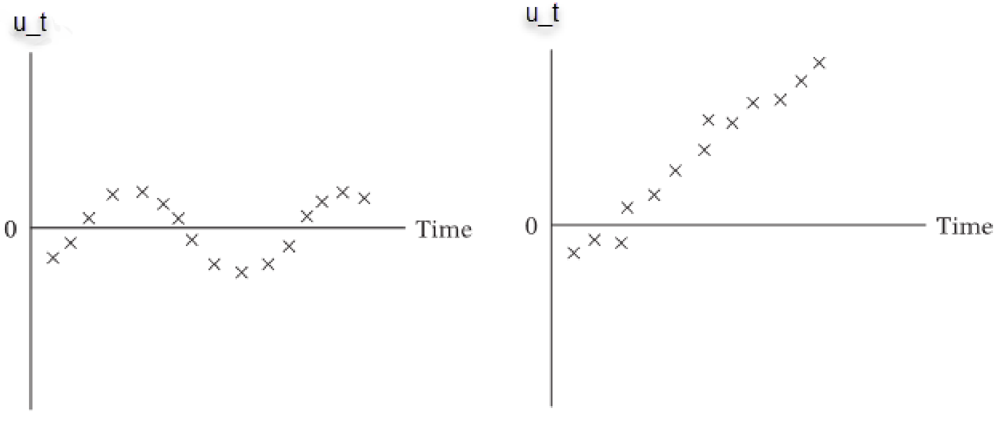
- 因变量 Y_t和自变量 X_t很可能都是非平稳的。因此随机干扰项 u_t也是非平稳的。此时，随机干扰项将表现出自相关。

直接观察视角：我们可以从随机干扰项 u_t 与其滞后变量 $u_{t-1}, u_{t-2}, \cdots, u_{t-p}, \cdots, u_{t-(T-1)}$ 的散点图来观察自相关模式（比较容易理解）。

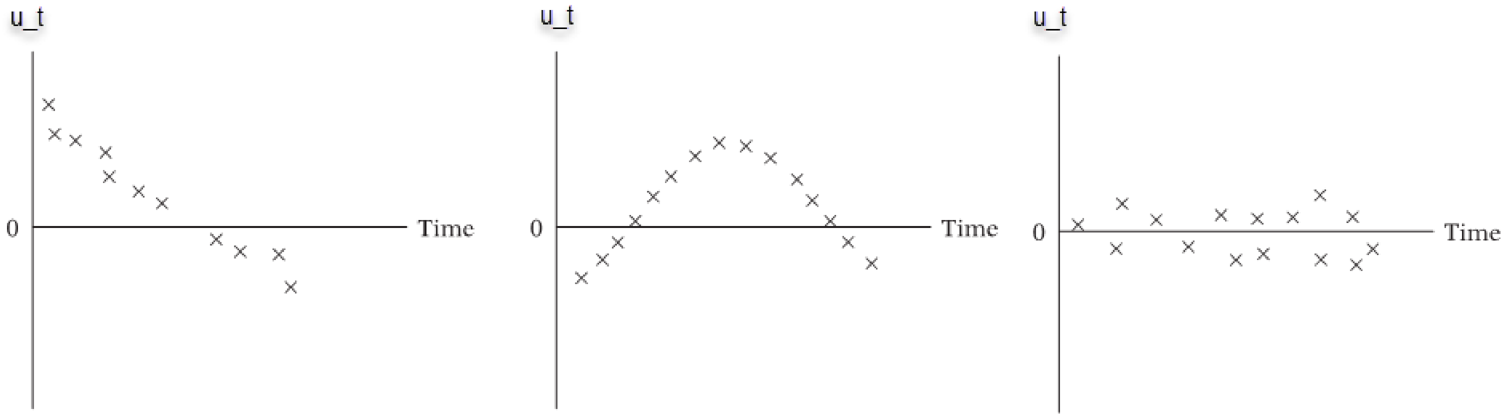


自相关的几种模式：视角2

间接观察视角： 我们可以从随机干扰项 u_t 随时间t的散点图变化来观察自相关模式（不太好理解）。



(a) (b)



(c) (d) (e)

9.2 序列自相关性的影响和后果

马尔可夫阶自回归

下面给出自相关情形为**马尔可夫1阶自回归模式**：

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \\
u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \qquad \leftarrow [-1 < \rho < 1]
\end{aligned}
$$

其中：

- ρ被称为自协方差系数(coefficient of autocovariance)

$$
\rho = \frac{E\left[\left(u_t - E\left(u_t\right)\right)\left(u_{t-1} - E\left(u_{t-1}\right)\right)\right]}{\sqrt{\operatorname{var}(u_t)}\sqrt{\operatorname{var}(u_{t-1})}} = \frac{E\left(u_t u_{t-1}\right)}{\operatorname{var}(u_{t-1})}
$$

- ε_t是满足以下标准CLRM假定的随机干扰项。此时ε_t也被成为**白噪声**误差项(white noise error Term)。

$$
\begin{aligned}
E\left(\varepsilon_t\right) &= 0 \\
var\left(\varepsilon_t\right) &= \sigma^2 \\
cov\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+s}\right) &= 0, \quad s \neq 0
\end{aligned}
$$

出现自相关性时的态度I

态度1：忽视自相关性，坚持错误地使用CLRM假设下OLS方法的各种公式。

$$
\begin{aligned}
&Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \\
&u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \leftarrow [-1 < \rho < 1]
\end{aligned}
$$

在**自相关性**存在的情形下（马尔科夫1阶自相关），却坚持使用OLS方法下的方差公式：

$$
\hat{\beta}_2 \|_{OLS}^{CLRM} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \frac{n\sum X_t Y_t - \sum X_t \sum Y_t}{n\sum X_t^2 - (\sum X_t)^2}
$$

$$
\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right) \|_{OLS}^{CLRM} = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}
$$

- 坚持使用的方差公式 $\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right) \|_{OLS}^{CLRM}$ 是有偏的，可能高估或低估其真实方差 $\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right)$。

出现自相关性时的态度2

态度2：承认“**自相关性**”这一事实，但仍旧使用OLS方法。

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \\
u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad\qquad \leftarrow [-1 < \rho < 1]
\end{aligned}
$$

在**自相关性**存在的情形下（马尔科夫1阶自相关），仍旧使用OLS方法，得到估计量及其方差的**“新公式”**（细节见下一页slide）：

$$
\hat{\beta}_2 \|_{OLS}^{AR1} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \frac{n\sum X_t Y_t - \sum X_t \sum Y_t}{n\sum X_t^2 - \left(\sum X_t\right)^2}
$$

$$
\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right) \|_{OLS}^{AR1} = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}\frac{1+r\rho}{1-r\rho} = var\left(\hat{\beta}_2\right) \|_{OLS}^{CLRM} \cdot \frac{1+r\rho}{1-r\rho}
$$

- 系数估计量仍是**一致的**；方差公式是**有偏的**，可能高估或低估其真实方差 $\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right)$。
- 请验证 $r = 0.6, \rho = 0.8$时，二者的大小关系？

给定马尔科夫1阶自相关情形（AR(1)）：

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad\qquad \leftarrow [-1 < \rho < 1] \end{aligned}$$

$$\operatorname{var}(u_t) = E\left(u_t^2\right) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}$$

$$\operatorname{cov}(u_t, u_{t-s}) = \operatorname{cov}(u_t, u_{t+s}) = E\left(u_t u_{t-s}\right) = \rho^s \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}$$

$$\operatorname{cor}(u_t, u_{t-s}) = \operatorname{cor}(u_t, u_{t+s}) = \rho^s$$

附录：方差计算细节

$$\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right)_{OLS}^{AR1}=\frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}\left[1+2\rho\frac{\sum x_t x_{t-1}}{\sum x_t^2}+2\rho^2\frac{\sum x_t x_{t-2}}{\sum x_t^2}+\cdots+2\rho^{n-1}\frac{x_1 x_n}{\sum x_t^2}\right]$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}\frac{1+r\rho}{1-r\rho} \qquad \leftarrow [if \quad X_t=rX_{t-1}+v_t]$$

- 若 $\rho=1$，上述方差和协方差将不能定义；
- 若 $|\rho|<1$， u_t的均值、方差和协方差都不随时间而变化。AR(1)过程被称为是**平稳的**。此时，协方差的值将随着两个误差的时间间隔越远而越小。

出现自相关性时的态度3

态度3：在**自相关性**存在的情形下，首先想办法消除自相关性，再使用OLS方法。**广义最小二乘法**（GLS）下（如**广义差分方程法**），估计量及其方差公式最终为写成：

$$\hat{\beta}_2\|_{\text{GLS}}^{AR1} = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(x_t - \rho x_{t-1}\right)\left(y_t - \rho y_{t-1}\right)}{\sum_{t=2}^{n}\left(x_t - \rho x_{t-1}\right)^2} + C \qquad \leftarrow \text{[C is a correction factor]}$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_2)_{\text{GLS}}^{AR1} = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^{n}\left(x_t - \rho x_{t-1}\right)^2} + D \qquad \leftarrow \text{[D is a correction factor]}$$

- 系数估计量是一致的
- 方差公式是无偏的，其期望将等于真实方差 $\text{var}\left(\hat{\beta}_2\right)$。
- 此时，GLS得到的才是**BLUE**！（证明过程略）

出现自相关性时的态度：总结

- **态度1**："把头埋进沙堆的鸵鸟"

$$\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right) \|_{OLS}^{CLRM} = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$$

- **态度2**："将错就错地走下去"

$$\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right) \|_{OLS}^{AR1} = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} \frac{1+r\rho}{1-r\rho} = var\left(\hat{\beta}_2\right) \|_{OLS}^{CLRM} \cdot \frac{1+r\rho}{1-r\rho}$$

- **态度3**："直面困难找出路"

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_2)_{\text{GLS}}^{AR1} = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^{n}\left(x_t - \rho x_{t-1}\right)^2} + D \qquad \leftarrow [\text{D is a correction factor}]$$

出现自相关时使用OLS的后果

在自相关出现时，OLS 估计量仍是线性的、无偏的和一致性的，但不再是有效的（亦即最小方差）。那么，如果我们继续使用OLS估计量，我们平常的假设检验程序会遇到什么问题呢?主要有：

- 参数估计不再是有效估计量(亦即不再是方差最小)
- 参数的显著性检验失去意义
- 模型的预测失效

下面分两种情形来讨论其后果：

- **态度1**：忽视自相关，采用OLS估计
- **态度2**：考虑自相关，采用OLS估计

出现自相关时使用OLS的后果（态度1和态度2）

对于**态度1**和**态度2**，执意采用OLS估计，将会：残差方差可能低估真实方差；高估可决系数；或低估考虑一阶自回归的方差；检验无效，得出错误的结论。

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \\
u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \leftarrow [-1 < \rho < 1]
\end{aligned}
$$

CLRM条件下采用OLS估计：

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_2 \|_{OLS}^{CLRM} &= \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} \\
\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right) \|_{OLS}^{CLRM} &= \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} \\
\hat{\sigma}^2 \|_{OLS}^{CLRM} &= \frac{\sum \mathrm{e}_i^2}{n-2} \\
E\left(\hat{\sigma}^2 \|_{OLS}^{CLRM}\right) &= \sigma^2
\end{aligned}
$$

AR(1)情形下使用OLS估计：

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_2 \|_{OLS}^{AR1} &= \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} \\
\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right) \|_{OLS}^{AR1} &= \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} \frac{1 + r\rho}{1 - r\rho} \\
\hat{\sigma}^2 \|_{OLS}^{AR1} &= \frac{\sigma^2 \left\{ n - \left[\frac{2}{(1-\rho)} - 2\rho r \right] \right\}}{n-2} \\
E\left(\hat{\sigma}^2 \|_{OLS}^{AR1}\right) &< \sigma^2
\end{aligned}
$$

出现自相关时使用OLS的后果

实际经济分析中，**正自相关性**一般更为普遍，也即 $(0<\rho<1; 0<r<1)$。此时：

$$\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right)\|_{OLS}^{AR1}=\frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}\frac{1+r\rho}{1-r\rho}=var\left(\hat{\beta}_2\right)\|_{OLS}^{CLRM}\cdot\frac{1+r\rho}{1-r\rho}$$

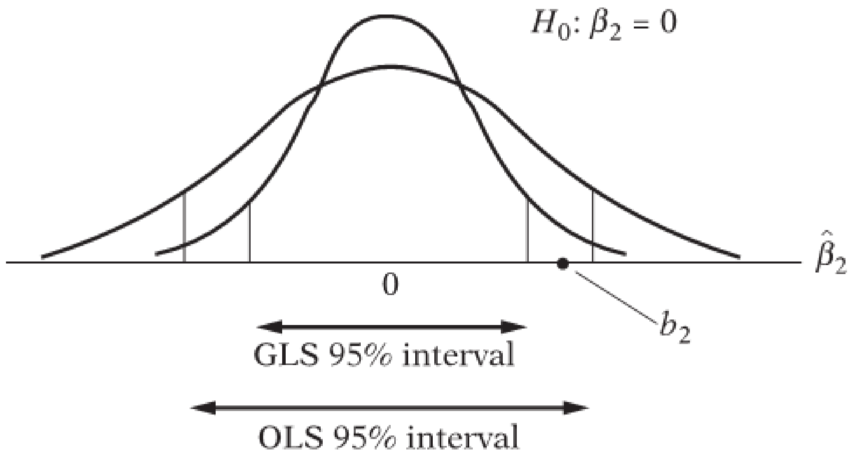
$$\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right)\|_{OLS}^{AR1}>var\left(\hat{\beta}_2\right)\|_{OLS}^{CLRM}\qquad\leftarrow[\text{if}\quad 0<\rho<1; 0<r<1]$$

出现自相关时使用OLS的后果

事实上，在AR(1)情形下采用广义最小二乘法（GLS）才能得到**BLUE**，也即意味着：

$$var\left(\hat{\beta}_2\right)\|_{OLS}^{AR1} > var\left(\hat{\beta}_2\right)\|_{OLS}^{CLRM} > var\left(\hat{\beta}_2\right)\|_{GLS}^{AR1}$$

同时，也将意味着GLS方法下**斜率系数**的置信区间也将**更窄**：



出现自相关时使用OLS的后果

- 如果一个对斜率参数 β_2的点估计值为 b_2，并给定显著性水平为 $\alpha = 0.05$
- 有可能在OLS方法下，95%置信区间检验**不显著**（接受原假设 H_0）；但是在GLS方法下，95%置信区间检验却可以是**显著**的（拒绝原假设 H_0，接受备择假设 H_1）

启示：尽管OLS 估计量是无偏的和一致性的，但为了构造置信区间并检验假设，要用GLS而不用OLS！

蒙特卡洛模拟（数据生成I）

给定如下模拟情景，我们可以生产**存在自相关情形**AR(1)的模拟数据表（观测数 $T=9$）：

$$
\begin{aligned}
Y_t &= 1 + 0.8X_t + u_t \\
u_t &= 0.7u_{t-1} + \varepsilon_t && \leftarrow [u_0 = 5] \\
\varepsilon_t &\sim N(0,1) && \leftarrow [\varepsilon_0 = 0]
\end{aligned}
$$

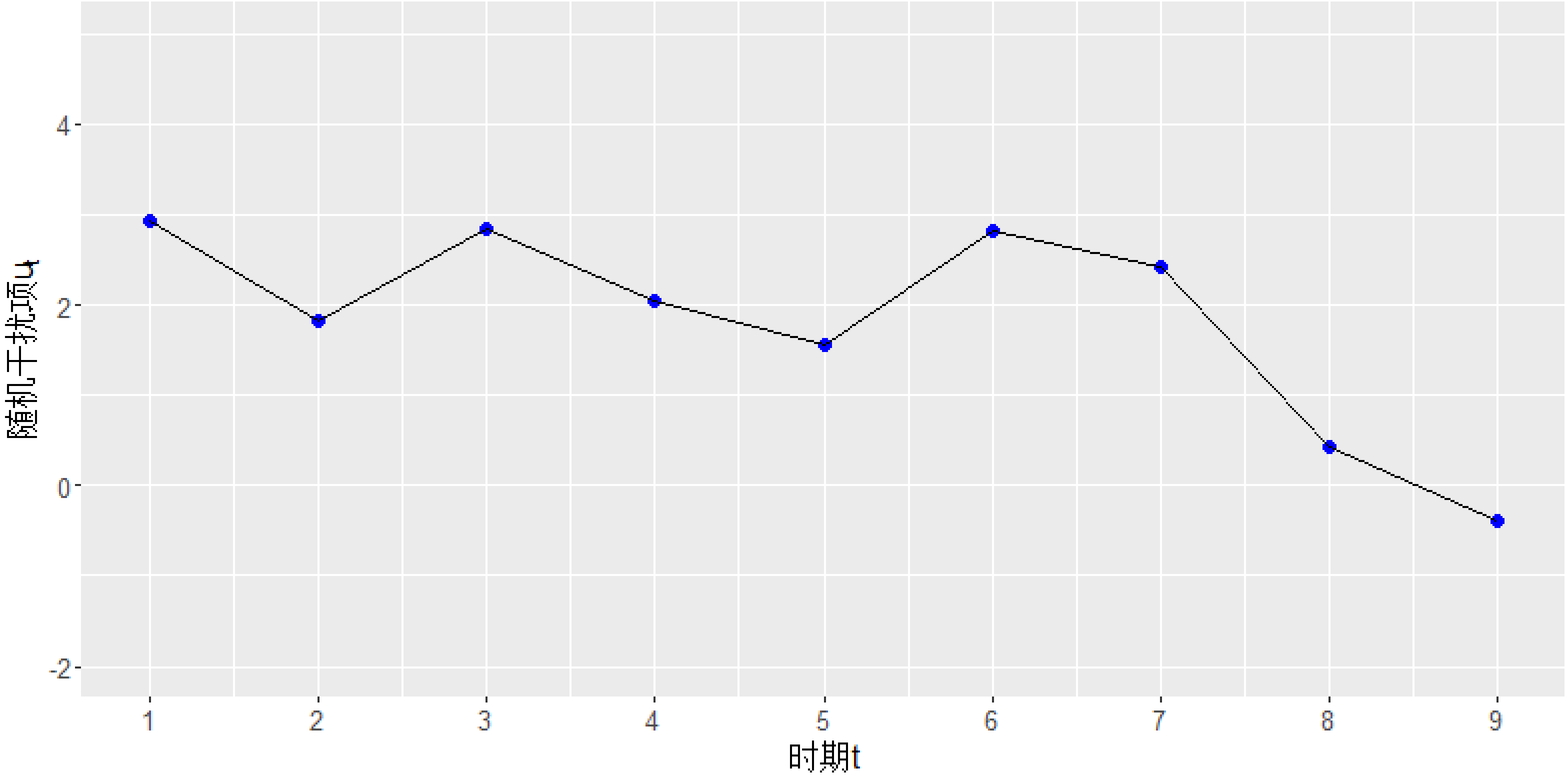
蒙特卡洛模拟（数据生成I）

ϵ_t	u_t	X_t	Y_t	$E(Y\|X_t)$	Y_t^*
0.0000	5.0000				
-0.5605	2.9395	1	4.7395	0.8000	0.2395
-0.2302	1.8275	2	4.4275	0.6400	1.3698
1.5587	2.8380	3	6.2380	0.5120	3.9587
0.0705	2.0571	4	6.2571	0.4096	3.2705
0.1293	1.5692	5	6.5692	0.3277	4.1293

Showing 1 to 6 of 10 entries

Previous 1 2 Next

存在自相关情形AR(1)的模拟数据，随机干扰项 u_t的分布模式如下：

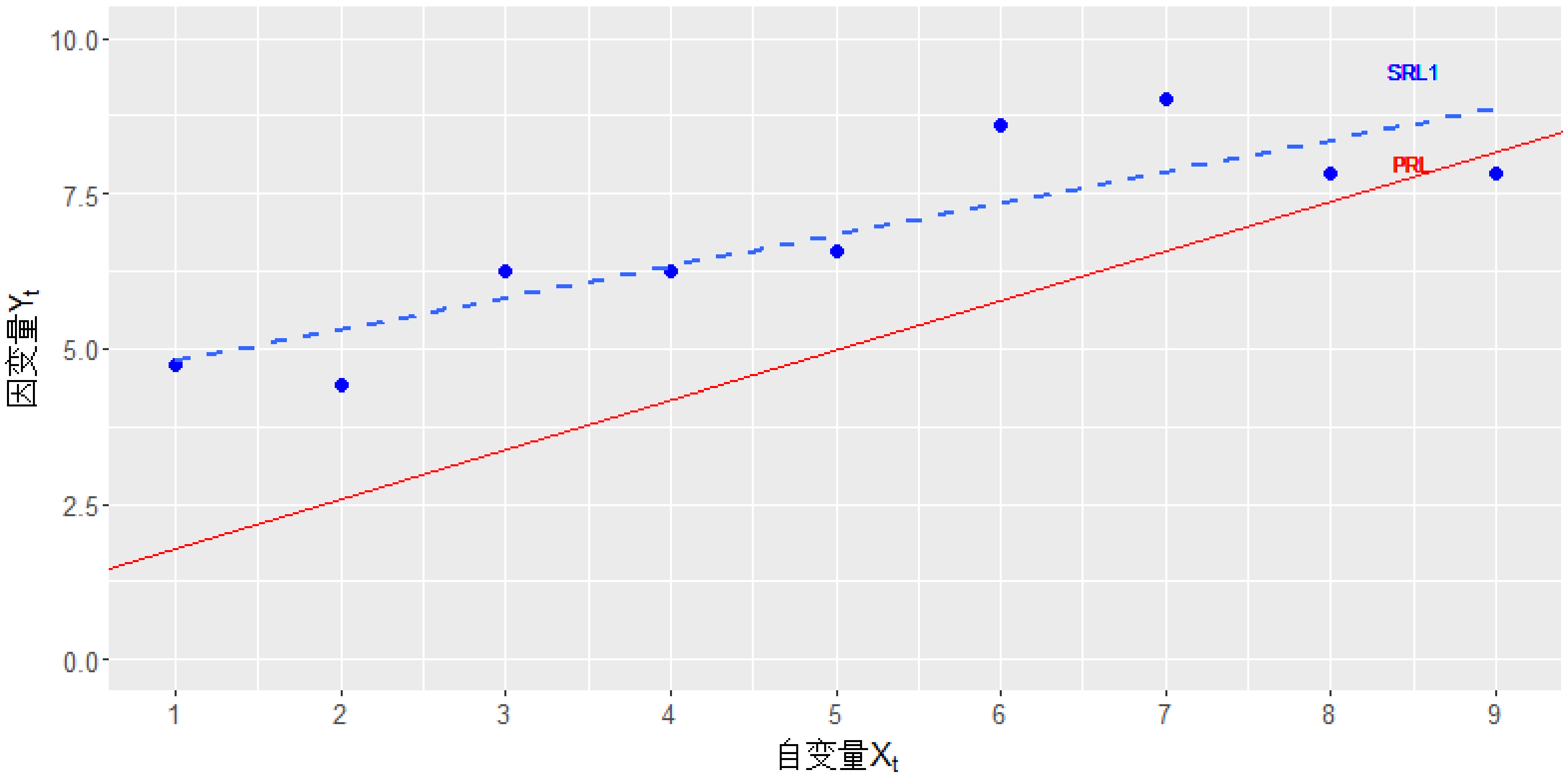


对以上存在AR(1)的**模拟数据**，我们构建如下的回归模型，并坚持采用OLS方法得到估计结果：

$$Y_t = +\beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

$$\begin{array}{lll}
\widehat{Y_t} = & +4.30 & +0.51X_t \\
\text{(t)} & (6.7249) & (4.4750) \\
\text{(se)} & (0.6389) & (0.1135) \\
\text{(fitness)} R^2 = 0.7410; \bar{R}^2 = 0.7040 & & \\
\quad F^* = 20.03;\ p = 0.0029 & &
\end{array}$$

对OLS方法下的**样本回归线（SRL1）**绘图，并与**真实的**总体回归线（PRL）进行对比：



$$E(Y|X_t) = 1 + 0.8X_t \qquad (PRL/PRF)$$

如果我们使用**符合CLRM假设**的模拟数据 (Y_t^*, X_t)，其中：

$$
\begin{aligned}
Y_t^* &= 1 + 0.8X_t + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &\sim N(0,1) \qquad \leftarrow [\varepsilon_0 = 0]
\end{aligned}
$$

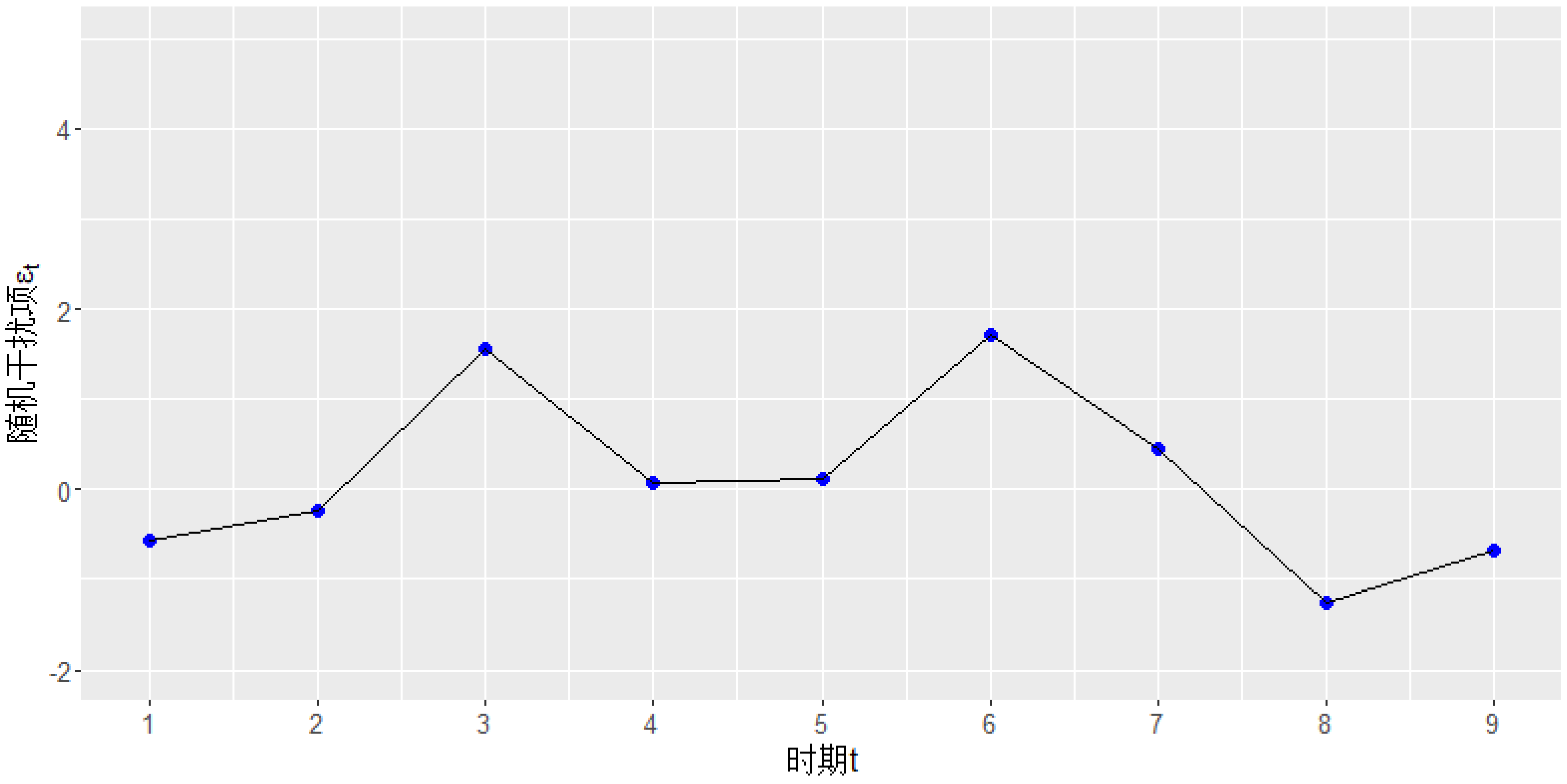
ϵ_t	u_t	X_t	Y_t	$E(Y\|X_t)$	Y_t^*
0.0000	5.0000				
-0.5605	2.9395	1	4.7395	0.8000	0.2395
-0.2302	1.8275	2	4.4275	0.6400	1.3698
1.5587	2.8380	3	6.2380	0.5120	3.9587
0.0705	2.0571	4	6.2571	0.4096	3.2705
0.1293	1.5692	5	6.5692	0.3277	4.1293

Showing 1 to 6 of 10 entries

Previous 1 2 Next

蒙特卡洛模拟（随机干扰项模式2）

符合CLRM假设的模拟数据，随机干扰项 ε_t 的分布模式如下：



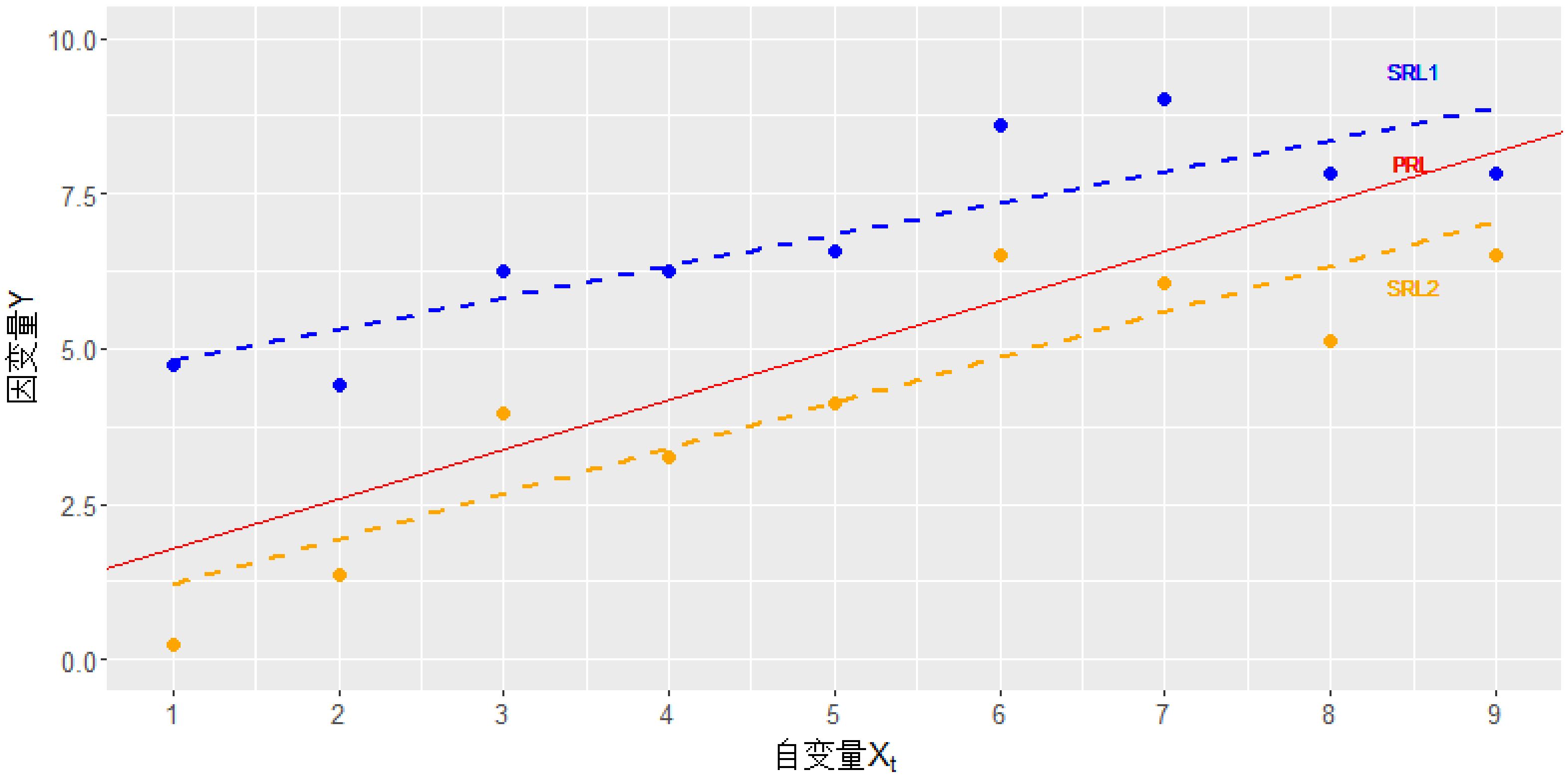
蒙特卡洛模拟（回归分析2）

对以上**符合CLRM假设**模拟数据，我们构建如下的回归模型，并采用OLS方法得到估计结果：

$$
\begin{array}{llll}
\widehat{NewY_t} = & +0.48 & & +0.73X_t \\
\text{(t)} & (0.6331) & & (5.4323) \\
\text{(se)} & (0.7569) & & (0.1345) \\
\text{(fitness)} & R^2 = 0.8083; \bar{R}^2 = 0.7809 & & \\
 & F^* = 29.51;\ p = 0.0010 & &
\end{array}
$$

注意：此处的 $\widehat{NewY_t}$ 表示 $\hat{Y}_t^*$

对OLS方法下的**样本回归线（SRL2）**绘图，并与**真实的**总体回归线（PRL）进行对比：



$$E(Y|X_t) = 1 + 0.8X_t \qquad (PRL/PRF)$$

工资与生产率案例

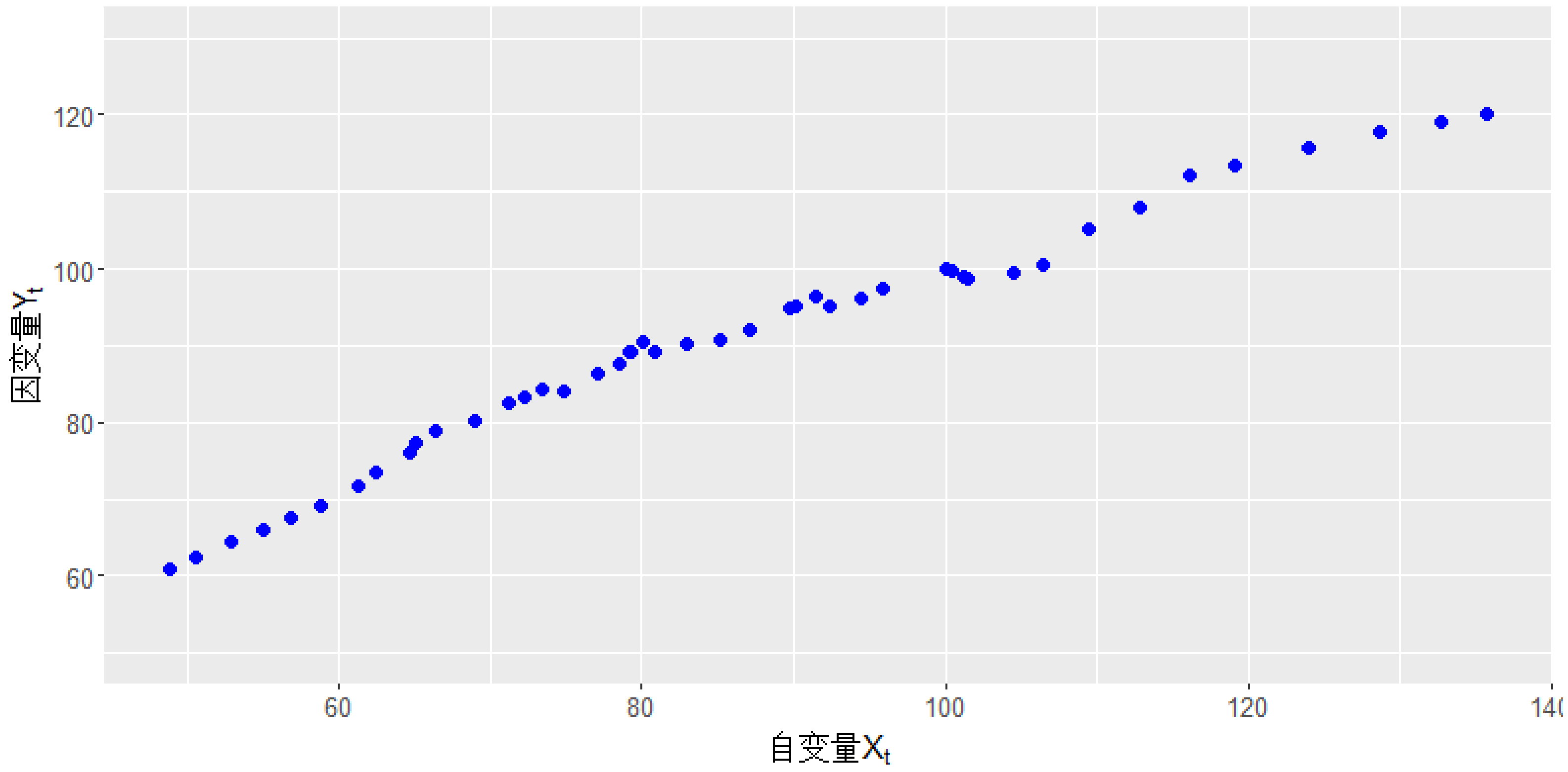
Y_t	X_t
60.8	48.9
62.5	50.6
64.6	52.9
66.1	55
67.7	56.8
69.1	58.8
71.7	61.2
73.5	62.5

Showing 1 to 8 of 46 entries　　Previous 1 2 3 4 5 6 Next

1960-2005年间美国商业部门工资与生产率数据(T=46)

- Y_t表示时均真实工资指数;
- X_t表示生产效率指数

散点图



对以上数据，我们可以分别构建如下的**经典线性回归模型**和**双对数模型**，并坚持采用OLS方法得到估计结果：

$$Y_t = +\beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

$$\begin{array}{llll}
\widehat{Y_t} = & +4.30 & +0.51X_t & \\
\text{(t)} & (6.7249) & (4.4750) & \\
\text{(se)} & (0.6389) & (0.1135) & \\
\text{(fitness)} & R^2 = 0.7410; \bar{R}^2 = 0.7040 & & \\
 & F^* = 20.03;\ p = 0.0029 & &
\end{array}$$

$$log(Y_t) = +\beta_1 + \beta_2 log(X_{t)} + u_t$$

$$\begin{array}{llll}
\widehat{log(Y_t)} = & +1.45 & +0.31log(X_{t)} & \\
\text{(t)} & (15.6171) & (5.2716) & \\
\text{(se)} & (0.0930) & (0.0590) & \\
\text{(fitness)} & R^2 = 0.7988; \bar{R}^2 = 0.7700 & & \\
 & F^* = 27.79;\ p = 0.0012 & &
\end{array}$$

思考：

- 我们的数据是否受到自相关问题的困扰？
- 我们如何发现自相关问题并加以纠正？

9.3 序列自相关性问题的诊断

图示法

图示法重点关注模型**残差**序列（e_t）是否存在某种系统化模式。总体回归模型PRM中随机干扰项 u_t是不能直接观测到，所以可通过观察样本回归模型SRM中残差的行为模式，间接诊断随机干扰项是否存在自相关性问题。

- 图形1：残差序列 e_t**时序图**（serial plot，也即残差 e_t随时期 t的变化图）。
- 图形2：残差序列 e_t与残差1阶滞后序列 e_{t-1}的**散点图**（scatter plot）。
- 图形3：残差序列 e_t与残差p阶滞后序列 e_{t-p}， $p \in (2, 3, \cdots, T-1)$的**散点图**（scatter plot）。

图示法：案例演示（主回归）

首先构建如下双对数**主回归模型**：

$$log(Y_t) = +\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 log(X_{t)} + e_i$$

双对数主回归模型回归结果为：

$$\begin{array}{llll}
\widehat{log(Y_t)} = & +1.61 & & +0.65log(X_{t)} \\
\text{(t)} & (29.3680) & & (52.7996) \\
\text{(se)} & (0.0547) & & (0.0124) \\
\text{(fitness)} & R^2 = 0.9845; & & \bar{R}^2 = 0.9841 \\
 & F^* = 2787.80; p = 0.0000 & &
\end{array}$$

图示法：案例演示（主回归EViews报告）

作为对照，下面给出的是主模型的EViews报告：

Equation: EQ_M0 Workfile: WAGE::corrl\

View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: LOG(Y)
Method: Least Squares
Date: Time:
Sample: 1960 2005
Included observations: 46

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.606680	0.054709	29.36802	0.0000
LOG(X)	0.652216	0.012353	52.79963	0.0000

R-squared	0.984462	Mean dependent var	4.490151
Adjusted R-squared	0.984109	S.D. dependent var	0.175142
S.E. of regression	0.022078	Akaike info criterion	-4.745943
Sum squared resid	0.021448	Schwarz criterion	-4.666437
Log likelihood	111.1567	Hannan-Quinn criter.	-4.716159
F-statistic	2787.801	Durbin-Watson stat	0.217558
Prob(F-statistic)	0.000000		

得到主回归模型的残差序列 e_t、残差1阶滞后序列 e_{t-1}，以及标准化变换的残差序列 $e_t^* = \frac{e_t}{S_{e_t}}$：

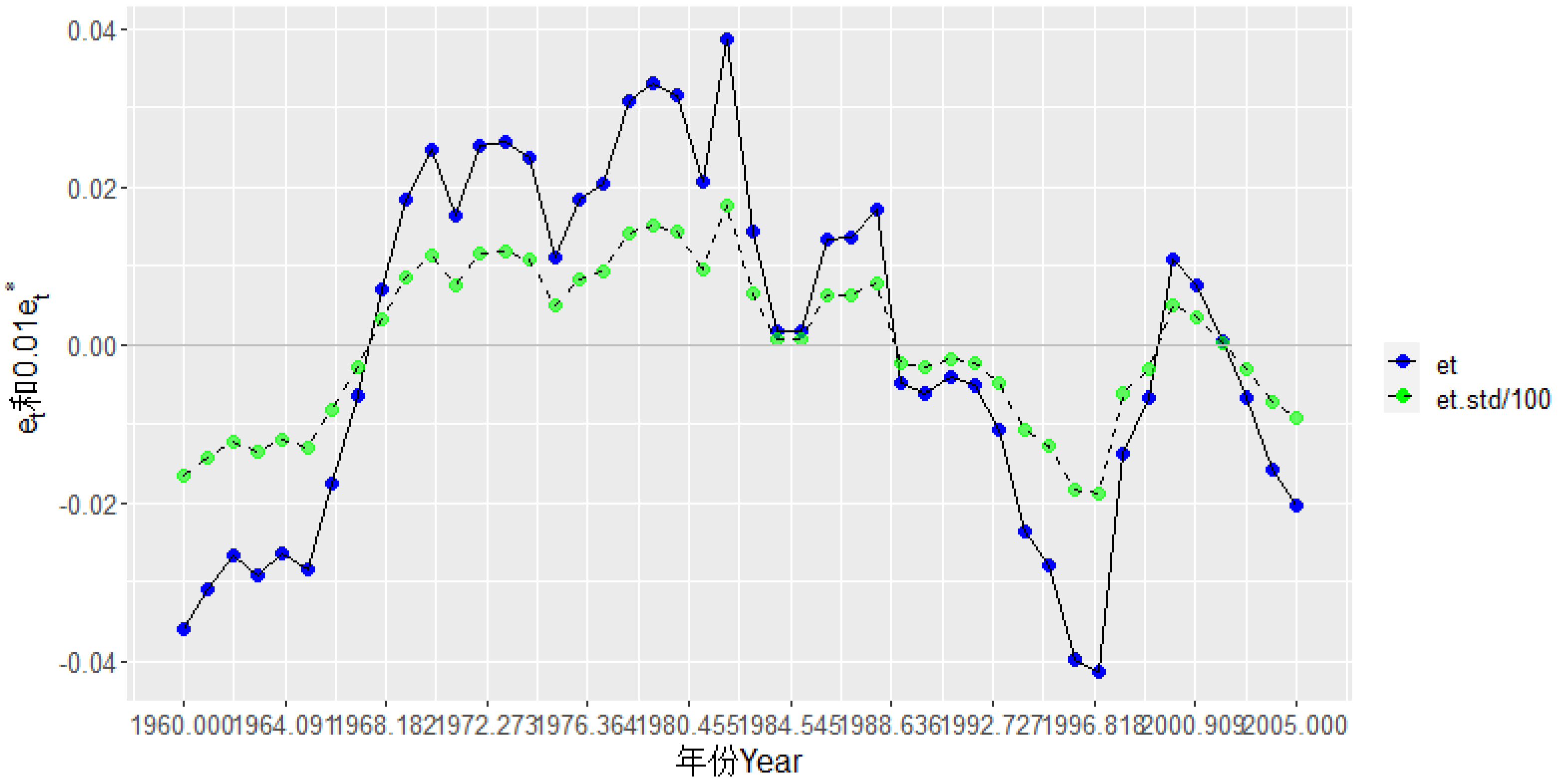
Y_t	X_t	$\hat{Y}_t$	e_t	e_{t-1}	e_t^*	$e_t^*/100$
60.8	48.9	4.1437	-0.0361		-1.6521	-0.0165
62.5	50.6	4.1659	-0.0308	-0.0361	-1.4099	-0.0141
64.6	52.9	4.1949	-0.0267	-0.0308	-1.2241	-0.0122
66.1	55	4.2203	-0.0292	-0.0267	-1.3357	-0.0134
67.7	56.8	4.2413	-0.0262	-0.0292	-1.2022	-0.0120
69.1	58.8	4.2639	-0.0283	-0.0262	-1.2985	-0.0130

Showing 1 to 6 of 46 entries

Previous 1 2 3 4 5 … 8 Next

> **提示：** Y_t表示时均真实工资指数；X_t表示生产效率指数；$e_t^* = \frac{e_t}{S_{e_t}} = \frac{e_t}{\sum e_t^2/(T-1)}$

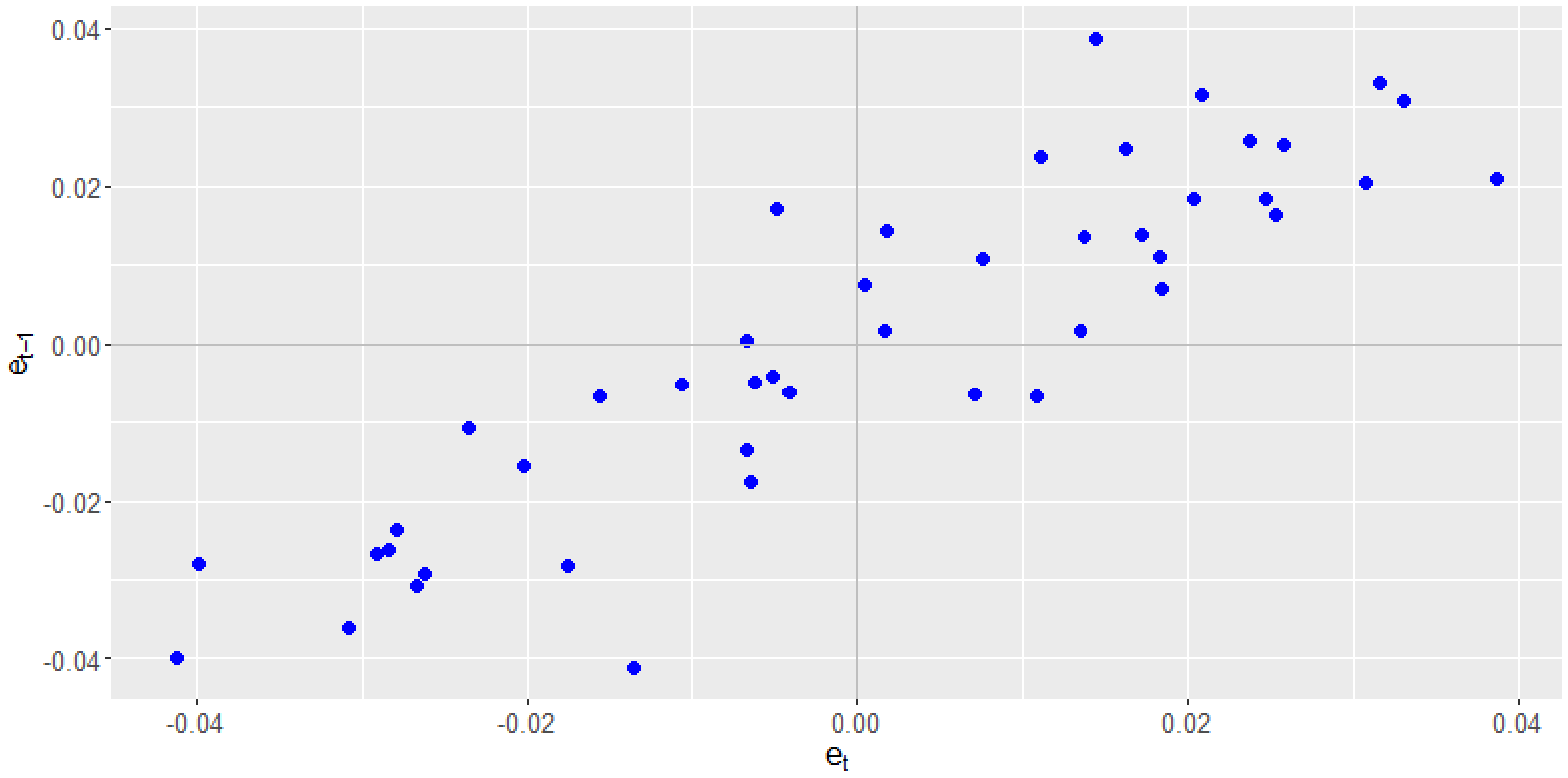
残差序列（e_t）和1/100标准化残差（$0.01e_t^*$）**时序图**（serial plot，也即时序变量随时期变化图）如下：



提示： `et`表示残差序列（e_t）；`et.std/100`表示1/100标准化残差序列（$e_t^*/100$）

图示法：案例演示（残差模式2）

残差序列 e_t 与残差1阶滞后序列 e_{t-1} 的**散点图**（scatter plot）为：



> **提示**：因为残差滞后1期序列 e_{t-1} 的观测数只有45，所以此处只显示45个观测点。

辅助回归法

思路：利用样本数据，构建并分析残差 e_t序列对 $e_{t-1}, e_{t-2}, \cdots$序列的**辅助回归方程**，从而间接判断随机干扰项 u_t的自相关性模式。也即存在如下的对应关系：

$$
\begin{aligned}
u_t &= \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \cdots + \rho_p u_{t-p} && p \in (1, 2, \cdots, T-1) \\
e_t &= \hat{\rho}_1 e_{t-1} + \hat{\rho}_2 e_{t-2} + \cdots + \hat{\rho}_p e_{t-p} + v_i && p \in (1, 2, \cdots, T-1)
\end{aligned}
$$

步骤：

- 构建主回归模型，并进行OLS估计，得到残差序列（及其滞后p阶序列）；
- 根据残差图模式，构建相应的**残差辅助回归方程**（无截距模型），根据回归报告，得到**主模型**是否存在自相关性问题的初步结论。

诊断依据：

- 如果**残差辅助回归方程**的F检验**显著**，则表明主模型存在**残差辅助回归方程**所示的自相关性问题。
- 如果**残差辅助回归方程**的F检验**不显著**，则表明主模型不存在**残差辅助回归方程**所示

辅助回归法：OLS估计

利用主回归模型的残差序列 e_t，我们可以构建如下的**辅助回归模型**：

$$e_t = \hat{\rho}_1 e_{t-1} + v_i$$

OLS估计的简要报告如下：

$$\begin{aligned}
\widehat{et} = &\quad + 0.87et.l1 \\
\text{(t)} &\quad (12.7360) \\
\text{(se)} &\quad (0.0681) \\
\text{(fitness)} & R^2 = 0.7866; \bar{R}^2 = 0.7818 \\
& F^* = 162.21; p = 0.0000
\end{aligned}$$

> **提示**：`et`表示残差序列 e_t，`et.l1`表示残差序列的1阶滞后变量 e_{t-1}。

自相关和偏相关分析法

思路：分析残差 e_t序列对 $e_{t-1}, e_{t-2}, \cdots$序列的自相关和偏相关统计图表报告（**注意滞后阶数的选择**）。

步骤：

- 对主模型进行OLS估计，得到残差 e_t序列
- 利用统计软件（`EViews`或`R`等）绘制残差序列的**自相关**和**偏相关**图表
- 观察和比对残差序列的**自相关**和**偏相关**图表，得到**主模型**是否存在自相关性问题的初步结论。

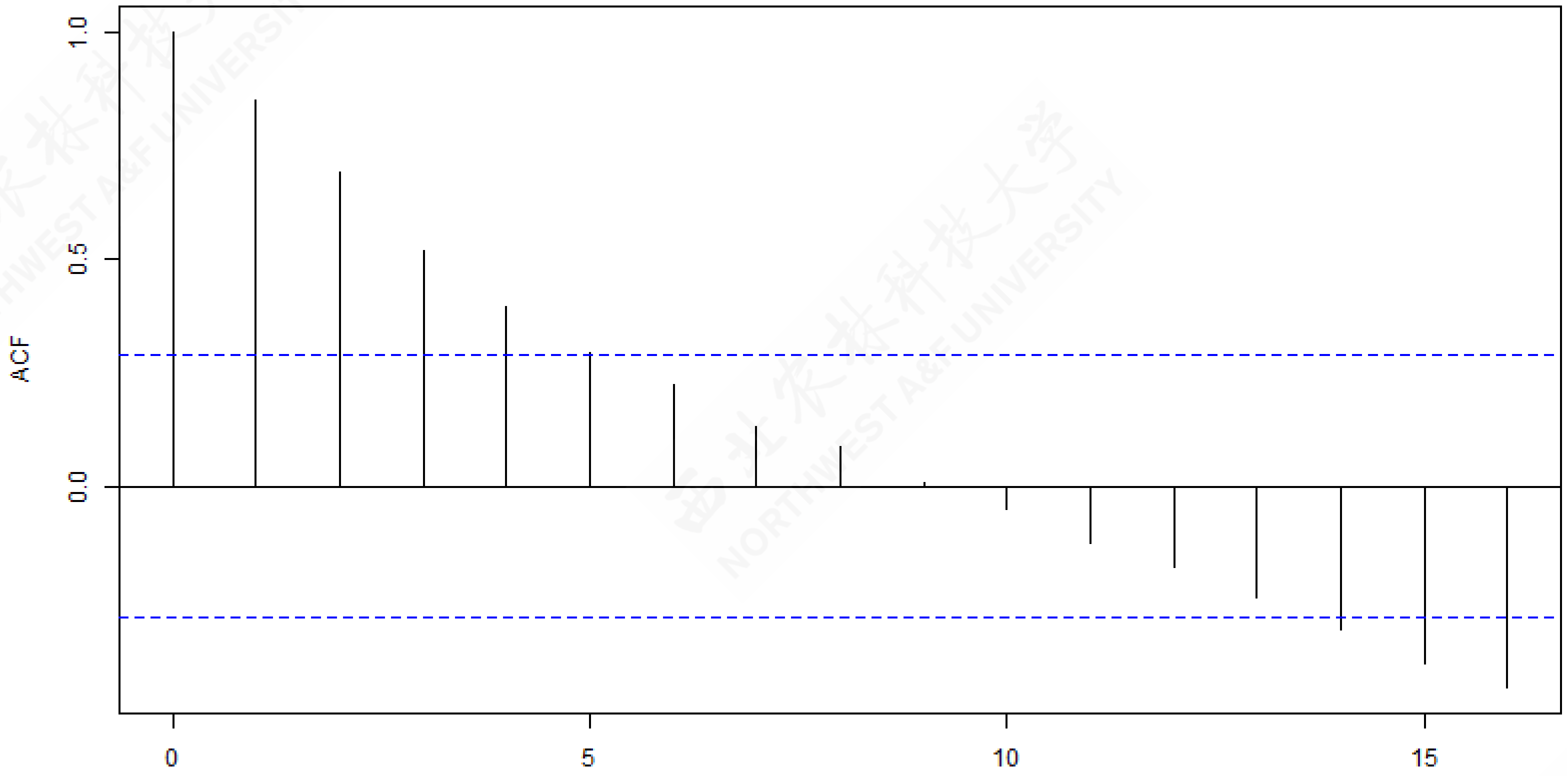
诊断依据：

- 观察**自相关**图和**偏相关**图的组合关系，判断残差序列的自相关性模式。

$$e_t = \hat{\rho}_1 e_{t-1} + \hat{\rho}_2 e_{t-2} + \cdots + \hat{\rho}_p e_{t-p} + v_i \qquad p \in (1, 2, \cdots, T-1)$$

案例：残差的自相关分析（ACF）（R软件）

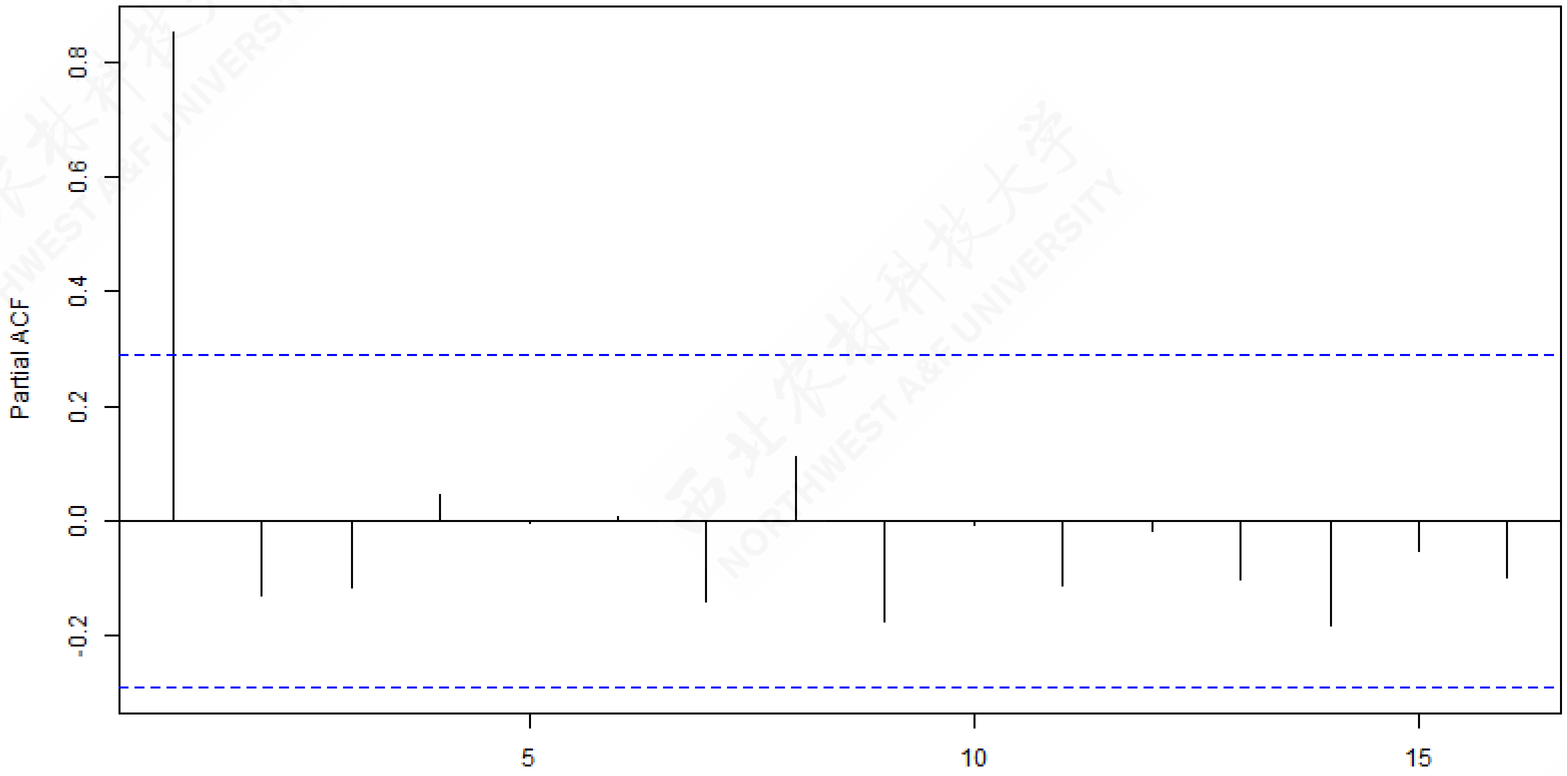
对于工资和劳动率案例，残差 e_t 序列的自相关图（ACF）为：



残差序列et的自相关图（ACF）

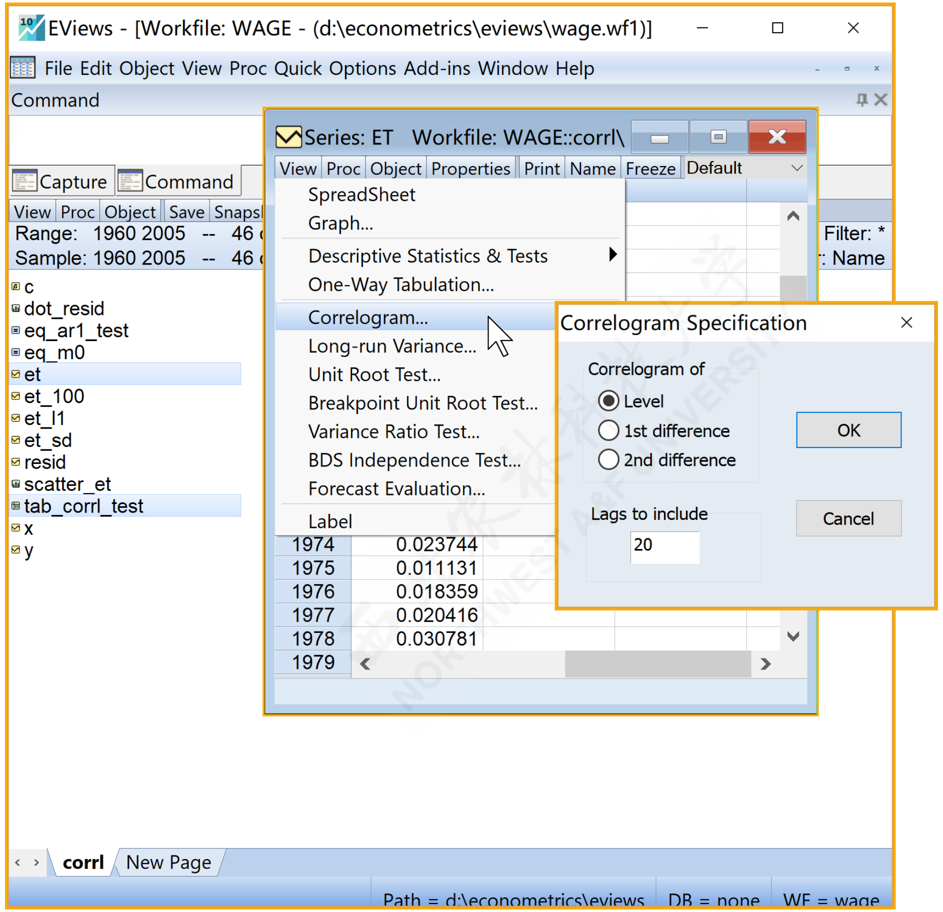
案例：残差序列的偏自相关分析（PACF）（R软件）

对于工资和劳动率案例，残差 e_t序列的偏自相关图（PACF）为：



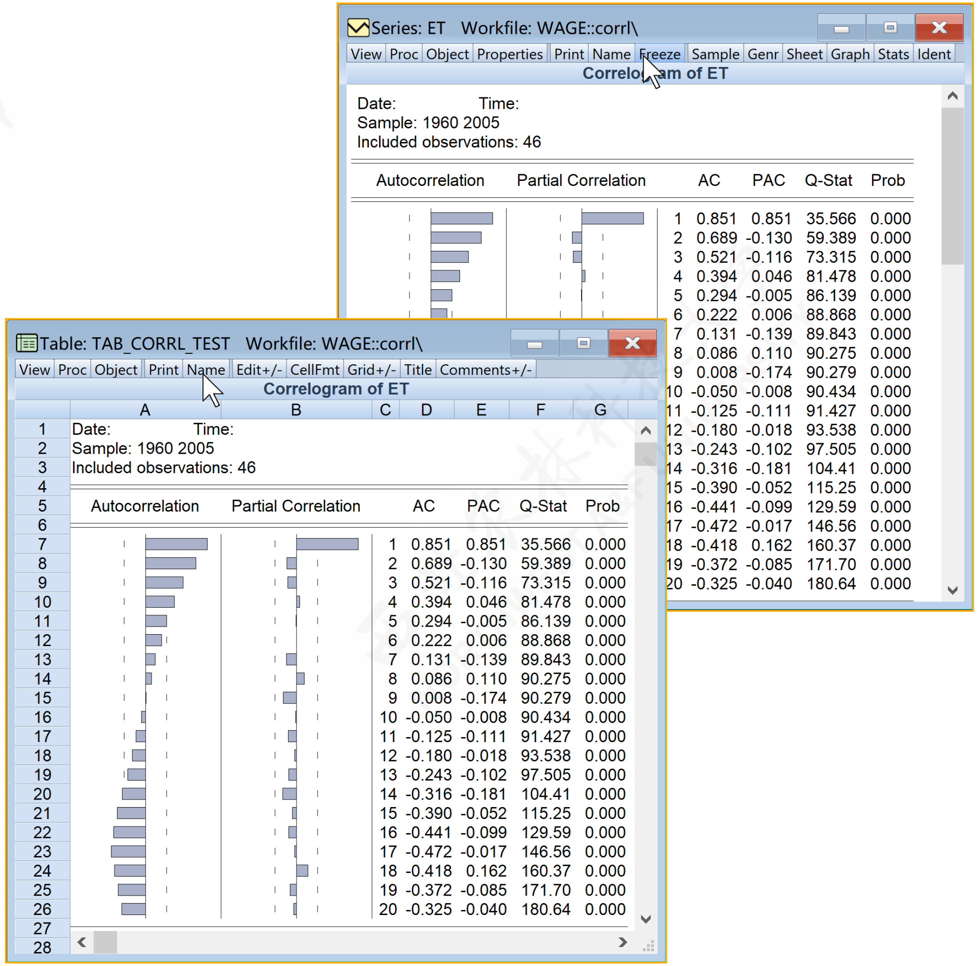
残差序列et的偏自相关图

案例：残差序列的自相关和偏自相关分析（EViews软件）



残差自相关和偏相关分析的Eviews操作

案例：残差序列的自相关和偏自相关分析（EViews软件）



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.851	0.851	35.566	0.000
2	0.689	-0.130	59.389	0.000
3	0.521	-0.116	73.315	0.000
4	0.394	0.046	81.478	0.000
5	0.294	-0.005	86.139	0.000
6	0.222	0.006	88.868	0.000
7	0.131	-0.139	89.843	0.000
8	0.086	0.110	90.275	0.000
9	0.008	-0.174	90.279	0.000
10	-0.050	-0.008	90.434	0.000
11	-0.125	-0.111	91.427	0.000
12	-0.180	-0.018	93.538	0.000
13	-0.243	-0.102	97.505	0.000
14	-0.316	-0.181	104.41	0.000
15	-0.390	-0.052	115.25	0.000
16	-0.441	-0.099	129.59	0.000
17	-0.472	-0.017	146.56	0.000
18	-0.418	0.162	160.37	0.000
19	-0.372	-0.085	171.70	0.000
20	-0.325	-0.040	180.64	0.000

残差自相关和偏相关的Eviews报告

德宾-沃森检验法（Durbin-Watson test）

假设总体回归模型PRM存在如下1阶自相关,则可以认为存在：：

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \\
u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \leftarrow [-1 < \rho < 1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_t + e_t \\
e_t &= \hat{\rho} e_{t-1} + v_i
\end{aligned}
$$

那么就可以构造得到如下的样本**Durbin-Watson的d统计量**：

$$
d = \frac{\sum_2^T (\mathrm{e}_t - e_{t-1})^2}{\sum_1^T e_t^2}
$$

- 它其实是用相继残差的差异的平方和与“残差平方和RSS”之比。
- 由于取相继差异时损失1个观测值，德宾-沃森d统计量的分子只有$T-1$次观测值。

德宾-沃森检验法（Durbin-Watson test）

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{\sum_2^T (\mathrm{e}_t - e_{t-1})^2}{\sum_2^T e_t^2} \\
&= \frac{\sum \mathrm{e}_t^2 + \sum \mathrm{e}_{t-1}^2 - 2\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_t^2} && \leftarrow \left[\sum e_t^2 \approx \sum e_{t-1}^2\right] \\
&\doteq 2\left(1 - \frac{\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_t^2}\right) && \leftarrow \left[\hat{\rho} = \frac{\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_t^2}\right] \\
&= 2(1-\hat{\rho})
\end{aligned}
$$

因为 $0 \leq \hat{\rho} \leq 1$，所以德宾-沃森d统计量 $0 \leq d \leq 4$，并具有如下**特征**：

- 如果 $\hat{\rho} = +1$，则 $d = 0$，此时残差序列存在**完全1阶正自相关性**。
- 如果 $\hat{\rho} = 0$，则 $d = 2$，此时残差序列不存在**自相关性**。
- 如果 $\hat{\rho} = -1$，则 $d = 4$，此时残差序列存在**完全1阶负自相关性**。

德宾-沃森检验法（Durbin-Watson test）

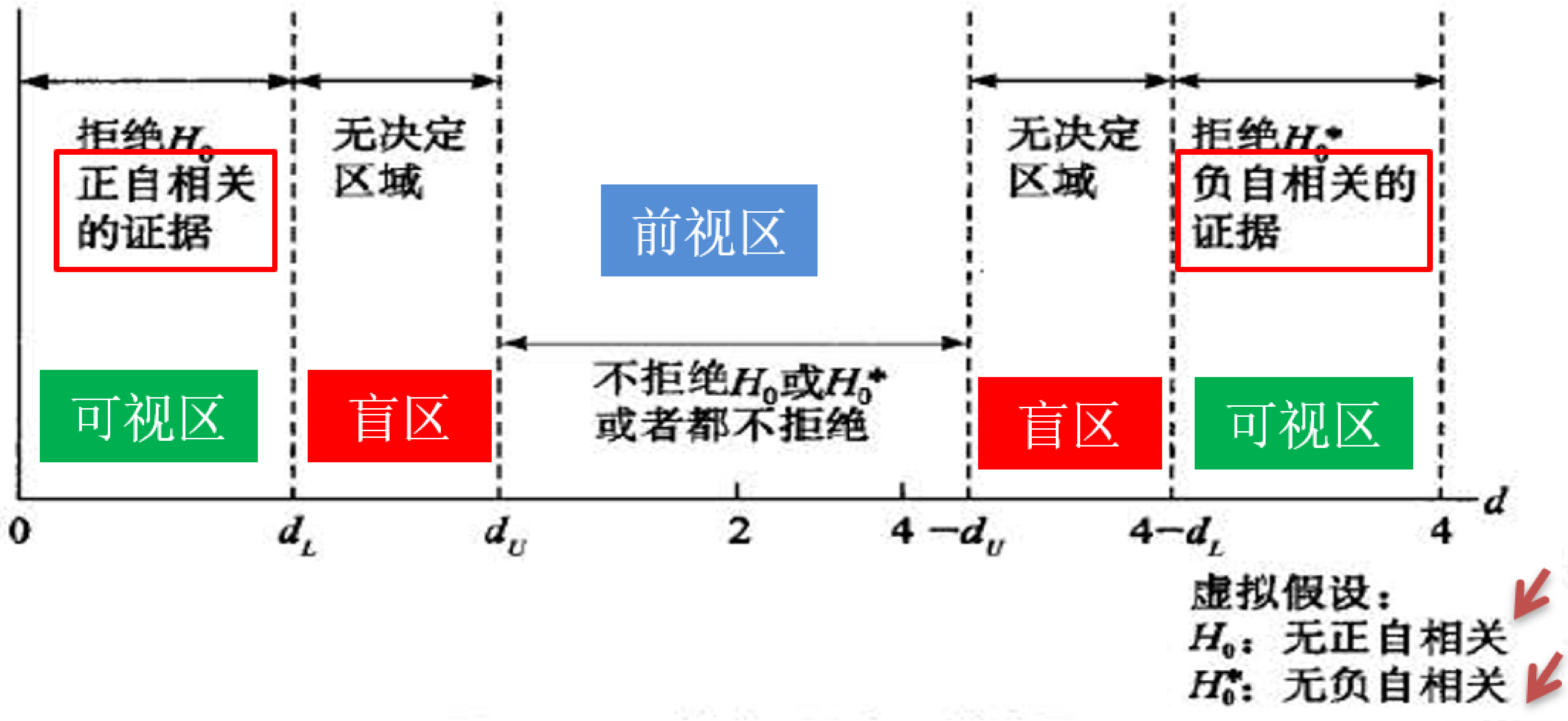
德宾-沃森检验法的步骤：

- 对主模型进行OLS估计，得到残差 e_t序列
- 得到主回归方程分析报告中的德宾-沃森d统计量（Durbin-Watson）
- 查找德宾-沃森统计量（Durbin-Watson）理论表，找到理论下界值 d_L和理论上界值 d_U。
- 比较德宾-沃森d统计量与查表值之间的关系，根据诊断依据，得到**主模型**是否存在自相关性问题的初步结论。

> Durbin-Watson统计量服从 $\chi^2(n, k, \alpha)$ 分布，具体可以参看Eviews在线帮助文档
> 下界值 d_L和上界值 d_U的理论值使用bootstrap方法仿真计算得到，与 (n, k, α)有关
> 下界值 d_L和上界值 d_U的理论查表值可以参考在线文档

德宾-沃森检验法的诊断依据（后视镜法则）：

- 如果 $0 < d < d_L$，则表明主模可能存在的**1阶正自相关**问题。
- 如果 $4 - d_L < d < 4$，则表明主模型可能存在的**1阶负自相关**问题。



德宾-沃森检验法（Durbin-Watson test）

德宾-沃森检验法的诊断依据（后视镜法则）：

德宾-沃森 d 检验：决策规则

虚拟假设	决策	如果
无正自相关	拒绝	$0<d<d_L$
无正自相关	无决定	$d_L \leqslant d \leqslant d_U$
无负自相关	拒绝	$4-d_L<d<4$
无负自相关	无决定	$4-d_U \leqslant d \leqslant 4-d_L$
无正或负自相关	不拒绝	$d_U<d<4-d_U$

德宾-沃森检验法（Durbin-Watson test）

德宾-沃森检验法的适用条件：

- 回归模型含有截距项，如果没有截距项，就必须重新做带有截距的回归
- 解释变量 $X_{2t}, X_{3t}, \cdots, X_{kt}$是非随机的，或者说，在反复抽样中是被固定的.
- 随机干扰项 u_t是按**1阶自回归模式**产生的：

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + u_t \\
u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \leftarrow [-1 < \rho < 1]
\end{aligned}
$$

- 因变量 Y_t的滞后变量 $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \cdots, Y_{t-q}$不能当作解释变量之一。如模型：

$$
Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \gamma Y_{t-1} + u_t
$$

- 没有数据缺损，如果数据缺失，d统计量无法补偿。

工资-劳动率案例中，双对数**主回归模型**及其OLS回归结果为：

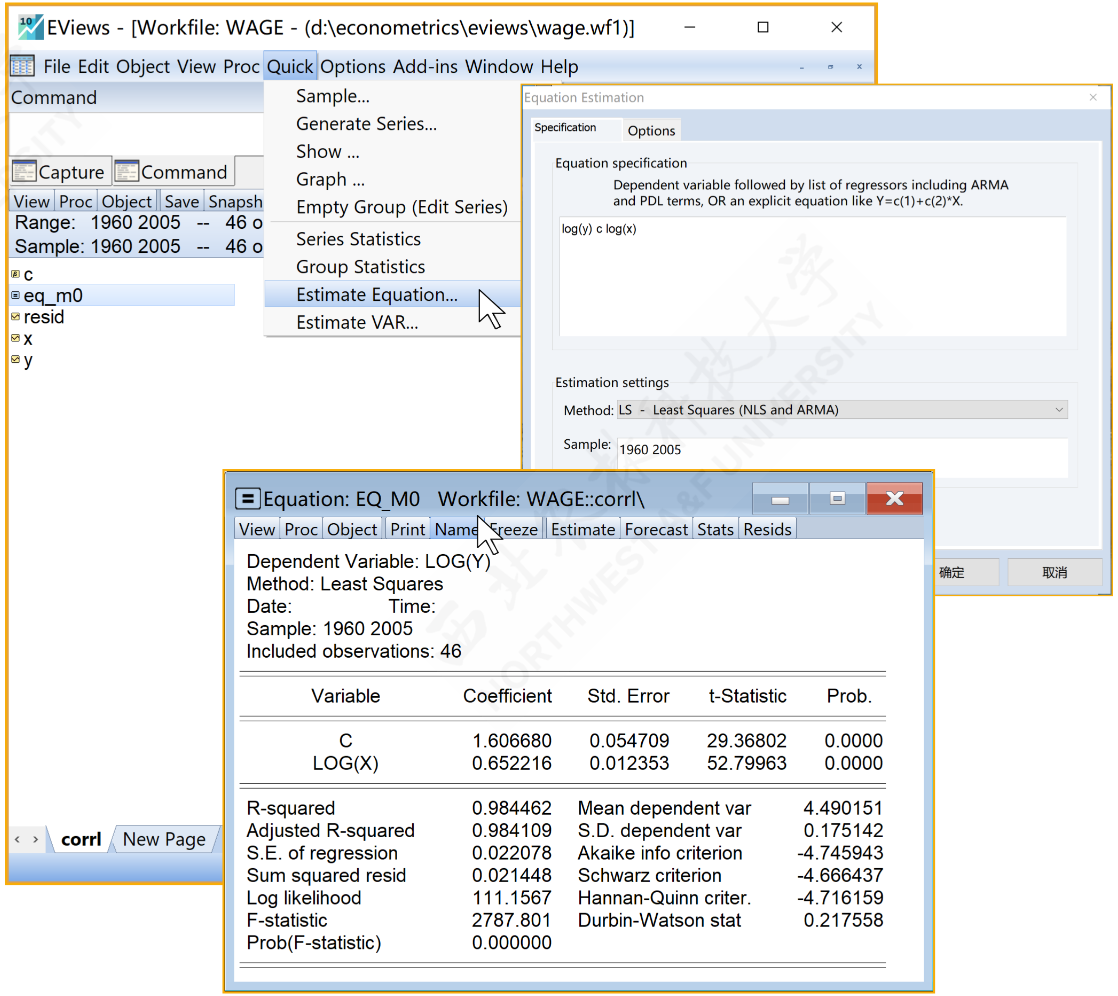
$$
\begin{array}{llll}
\widehat{log(Y_t)} = & + 1.61 & & + 0.65log(X_{t)} \\
(\text{t}) & (29.3680) & & (52.7996) \\
(\text{se}) & (0.0547) & & (0.0124) \\
(\text{fitness}) & R^2 = 0.9845; & & \bar{R}^2 = 0.9841 \\
 & F^* = 2787.80; p = 0.0000 & &
\end{array}
$$

我们可以利用残差序列，采用R软件计算得到**德宾-沃森d统计量**：

```
	Durbin-Watson test

data:  lm.main
DW = 0.21756, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true autocorrelation is not 0
```

- 根据主回归报告的计算结果，Durbin-Watson的d统计量为 $d = 0.2175583$。查表可知在当 $(n =' rn', k = 3, \alpha = 0.05)$时， $d_L = 1.475, d_U = 1.566$，表明 $0 < d < d_L$，因此认为主模型可能存在的**1阶正自相关性**问题。

案例：德宾-沃森检验（EViews报告）



主回归模型Eviews操作

案例：德宾-沃森检验（EViews报告）

Equation: EQ_M0 Workfile: WAGE::corrl\

View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: LOG(Y)
Method: Least Squares
Date: Time:
Sample: 1960 2005
Included observations: 46

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.606680	0.054709	29.36802	0.0000
LOG(X)	0.652216	0.012353	52.79963	0.0000

R-squared	0.984462	Mean dependent var	4.490151
Adjusted R-squared	0.984109	S.D. dependent var	0.175142
S.E. of regression	0.022078	Akaike info criterion	-4.745943
Sum squared resid	0.021448	Schwarz criterion	-4.666437
Log likelihood	111.1567	Hannan-Quinn criter.	-4.716159
F-statistic	2787.801	Durbin-Watson stat	0.217558
Prob(F-statistic)	0.000000		

主回归模型Eviews报告

拉格朗日乘数检验法（LM test）

拉格朗日乘数检验（LM test），也称为布罗施-戈弗雷检验（Breusch-Goldfrey, BG test）。

拉格朗日乘数检验假定随机干扰项 u_t服从如下的p阶自回归模式AR(p):

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + u_t \\
u_t &= \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \cdots + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

拉格朗日乘数检验的原假设为： $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_p = 0$

拉格朗日乘数检验法（LM test）

拉格朗日乘数检验的适用条件：

- 可以对**高阶自相关模式**[AR(p)]进行检验
- 允许非随机回归元
- 允许随机干扰项为自回归移动平均ARMA(p,q)模式。也即：

$$
\begin{aligned}
&Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + u_t \\
&u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \cdots + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t + \lambda_1 \varepsilon_{t-1} + \lambda_2 \varepsilon_2 + \cdots + \lambda_q \varepsilon_{t-q} \\
&\varepsilon_t \sim iidN(0,1)
\end{aligned}
$$

拉格朗日乘数检验法（LM test）

拉格朗日乘数检验的步骤：

- 对主模型进行OLS估计，得到残差 e_t序列
- 再利用主回归模型的残差序列，做如下的**LM辅助回归**：

$$resid_t = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 X_{2t} + \hat{\alpha}_3 X_{3t} + \cdots + \hat{\alpha}_k X_{kt} + \hat{\rho}_1 e_{t-1} + \hat{\rho}_2 e_{t-2} + \cdots + \hat{\rho}_p e_{t-p} + v_t$$

- 计算**LM辅助回归**方程的判定系数 R^2，并得到如下**LM统计量**（卡方统计量）：

$$LM \equiv \chi^{2^*} = (n-p)R^2 \sim \chi^2(p)$$

实际EViews操作中，EViews的LM检验报告会对缺失样本数进行提前处理，所以统计量计算会显示`Obs*R-squared`$=n*R^2$，而且下面会有一行提示“Presample Missing value lagged residuals set to zero”。具体可以参看EViews说明。

拉格朗日乘数检验法（LM test）

拉格朗日乘数检验的诊断依据：

- 如果**LM辅助回归方程**的卡方检验**显著**，也即 $LM \equiv \chi^{2^*} > \chi^2_{1-\alpha}(p)$（对应的概率值 P< 0.1），则表明**主模型**是存在**LM辅助回归方程**形式的自相关性问题。
- 如果**LM辅助回归方程**的卡方检验**不显著**，也即 $LM \equiv \chi^{2^*} < \chi^2_{1-\alpha}(p)$（对应的概率值 P>0.1），则表明**主模型**是不存在**LM辅助回归方程**形式的自相关性问题。

案例：拉格朗日乘数检验

工资-劳动率案例中，双对数**主回归模型**及其OLS回归结果为：

$$
\begin{array}{lll}
\widehat{log(Y_t)} = & +1.61 & +0.65log(X_{t)} \\
\text{(t)} & (29.3680) & (52.7996) \\
\text{(se)} & (0.0547) & (0.0124) \\
\text{(fitness)} & R^2 = 0.9845; & \bar{R}^2 = 0.9841 \\
 & F^* = 2787.80; p = 0.0000 &
\end{array}
$$

我们可以利用残差序列构建 $p = 1$ 的**LM辅助回归方程**：

$$e_t = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 X_{2t} + \hat{\rho}_1 e_{t-1} + v_t$$

案例：拉格朗日乘数检验（R软件）

采用R软件的**拉格朗日乘数检验**结果为：

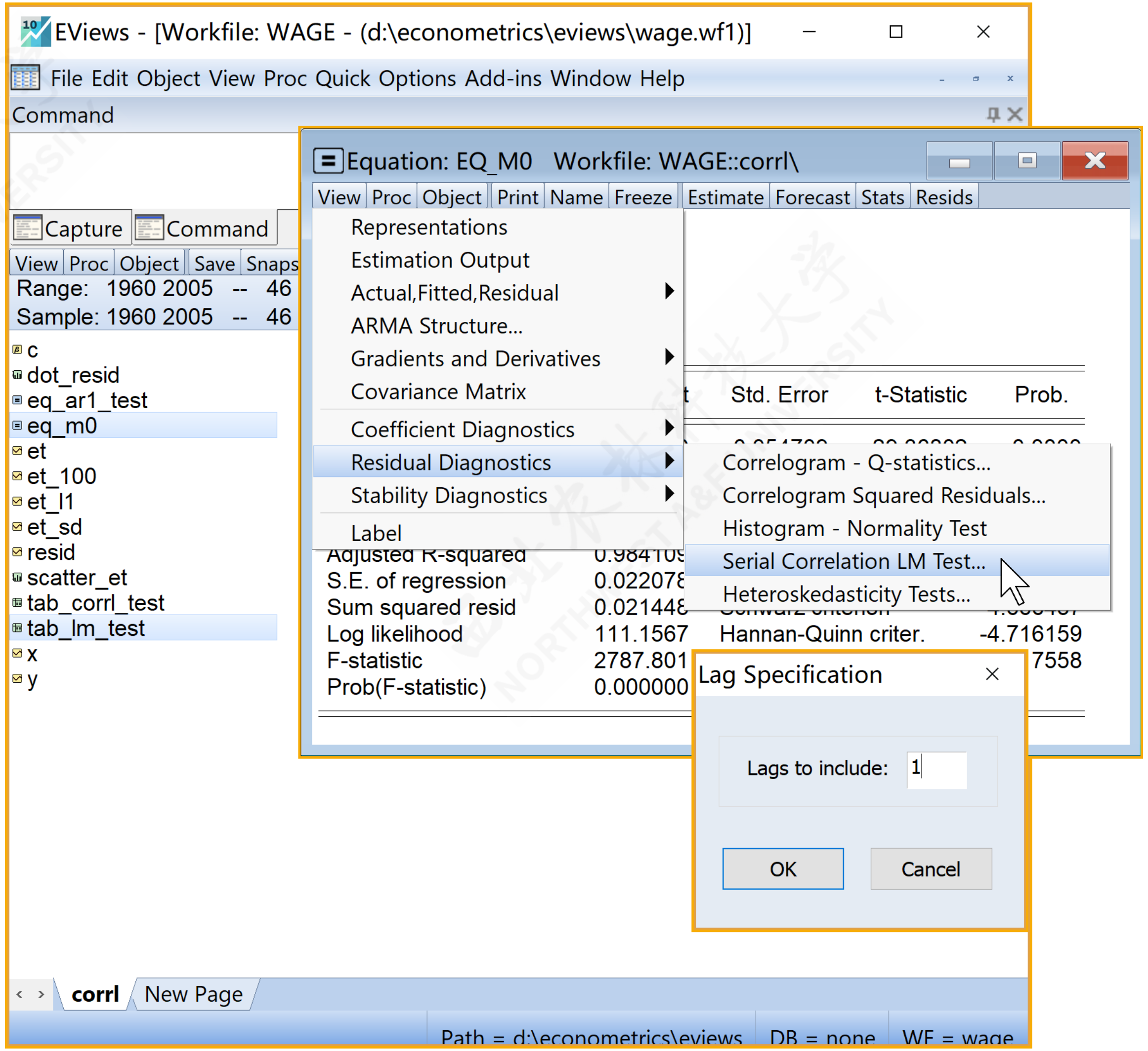
```
	Breusch-Godfrey test for serial correlation of order up to 1

data:  lm.main
LM test = 34.02, df = 1, p-value = 5.456e-09
```

$$resid_t = +0.0063 - 0.0015log(X_t) + 0.8687lag(resid)_1$$

- 根据LM辅助方程的计算结果，LM统计量为 $LM = \chi^{2^*} = 34.0196$，其对应的概率值p为0.0000。
- 查表也可知在当 $n = 46, k = 2, \alpha = 0.05$时，$\chi^2_{1-\alpha}(p) = \chi^2_{0.95}(1) = 3.841459$要远远小于样本LM统计量值。
- 因此认为主模型可能存在**自相关性**问题。

> 提示：$resid_t$表示 e_t；$lag(resid)_1$表示 e_{t-1}。

案例：拉格朗日乘数检验（EViews软件）



案例：拉格朗日乘数检验（EViews软件）

Equation: EQ_M0 Workfile: WAGE::corrl\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	122.1032	Prob. F(1,43)	0.0000
Obs*R-squared	34.01962	Prob. Chi-Square(1)	0.0000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: Time:
Sample: 1960 2005
Included observations: 46
Presample missing value lagged resic

Variable	Coefficient
C	0.006258
LOG(X)	-0.001502
RESID(-1)	0.868652

R-squared	0.739557
Adjusted R-squared	0.727443
S.E. of regression	0.011398
Sum squared resid	0.005586
Log likelihood	142.1002
F-statistic	61.05162
Prob(F-statistic)	0.000000

Table: TAB_LM_TEST Workfile: WAGE::corrl\

View | Proc | Object | Print | Name | Edit+/- | CellFmt | Grid+/- | Title | Comments+/-

	A	B	C	D	E
1	Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:				
2					
3	F-statistic	122.1032	Prob. F(1,43)		0.0000
4	Obs*R-squared	34.01962	Prob. Chi-Square(1)		0.0000
5					
6					
7	Test Equation:				
8	Dependent Variable: RESID				
9	Method: Least Squares				
10	Date: 11.050(Time:).0000				
11	Sample: 1960 2005				
12	Included observations: 46				
13	Presample missing value lagged residuals set to zero.				
14					
15	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
16					
17	C	0.006258	0.028248	0.221551	0.8257
18	LOG(X)	-0.001502	0.006378	-0.235464	0.8150
19	RESID(-1)	0.868652	0.078611	11.05003	0.0000
20					
21	R-squared	0.739557	Mean dependent var		5.71E-16
22	Adjusted R-squared	0.727443	S.D. dependent var		0.021832
23	S.E. of regression	0.011398	Akaike info criterion		-6.047835
24	Sum squared resid	0.005586	Schwarz criterion		-5.928576
25	Log likelihood	142.1002	Hannan-Quinn criter.		-6.003160
26	F-statistic	61.05162	Durbin-Watson stat		1.518451
27	Prob(F-statistic)	0.000000			
28					
29					

拉格朗日自相关检验的Eviews报告

9.4 序列自相关性问题的矫正

广义差分方程法（自相关系数已知）

广义差分方程法：对主回归方程进行合适的**广义差分变换**，使得变换以后的新模型不再有自相关问题，然后再使用OLS方法估计，从而得到参数估计的**BLUE**。

广义差分法变换法属于**广义最小二乘法**（GLS）的一种，专门用来处理随机干扰项出现自相关性问题的一种常用方法。

广义差分方程法的原理：如果主模型随机干扰项的**自相关系数** ρ已知，则可以直接用差分变换得到新模型，容易证明新模型将不再有自相关问题。

广义差分方程法（自相关系数已知）

下面将说明**1阶自相关**情形AR(1)下的**广义差分变换**的理论过程：

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + u_t && \text{(PRM)} \\
u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t && \text{(AR(1))} \\
\rho Y_{t-1} &= \rho\beta_1 + \beta_2 \rho X_{2t-1} + \rho u_{t-1} && \text{(Lag 1 Model)} \\
(Y_t - \rho Y_{t-1}) &= \beta_1(1-\rho) + \beta_2(X_{2t} - \rho X_{2t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1}) && (\Delta \text{ Model}) \\
Y_t^* &= \beta_1^* + \beta_2^* X_{2t}^* + \varepsilon_t && \text{(Adjusted Model)}
\end{aligned}
$$

其中，AR(1)模型中的 $\varepsilon_t \sim i.i.d\ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$。

广义差分方程法：基于残差辅助方程

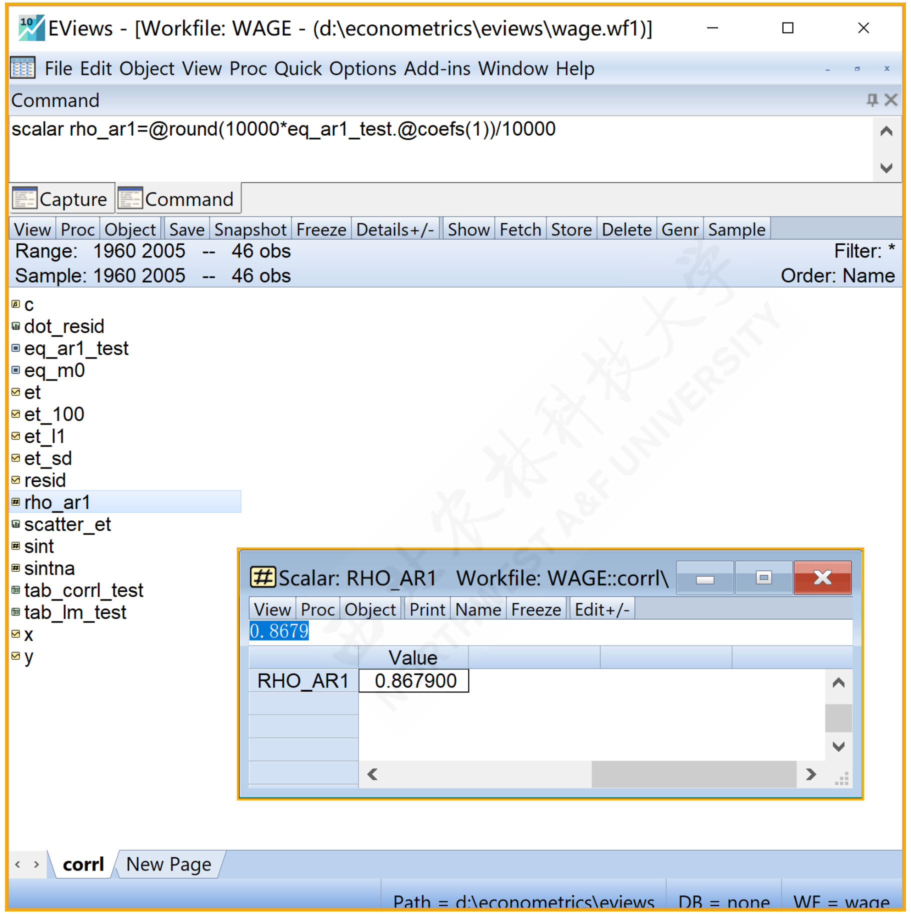
矫正思路：如果主模型随机干扰项的自相关系数未知，则可以直接用基于残差辅助方程估计得到 $\hat{\rho}$；再根据 $\rho \simeq \hat{\rho}$ 用广义差分变换得到新模型，容易证明新模型将不再有自相关问题。

如下将展示**1阶自相关**AR(1)情形下的广义差分变换的理论过程：

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + u_t && \text{PRM} \\
u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t && \text{AR(1)} \\
Y_t &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2t} + e_t && \text{SRM} \\
e_t &= \hat{\rho} e_{t-1} + v_t && \text{Auxiliary Model} \\
\rho &\simeq \hat{\rho} && \\
\rho Y_{t-1} &= \rho\beta_1 + \beta_2 \rho X_{2t-1} + \rho u_{t-1} && \text{Lag 1 Model} \\
(Y_t - \rho Y_{t-1}) &= \beta_1(1-\rho) + \beta_2(X_{2t} - \rho X_{2t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1}) && \Delta\text{1 Model} \\
Y_t^* &= \beta_1^* + \beta_2^* X_{2t}^* + \varepsilon_t && \text{Adjusted Model}
\end{aligned}
$$

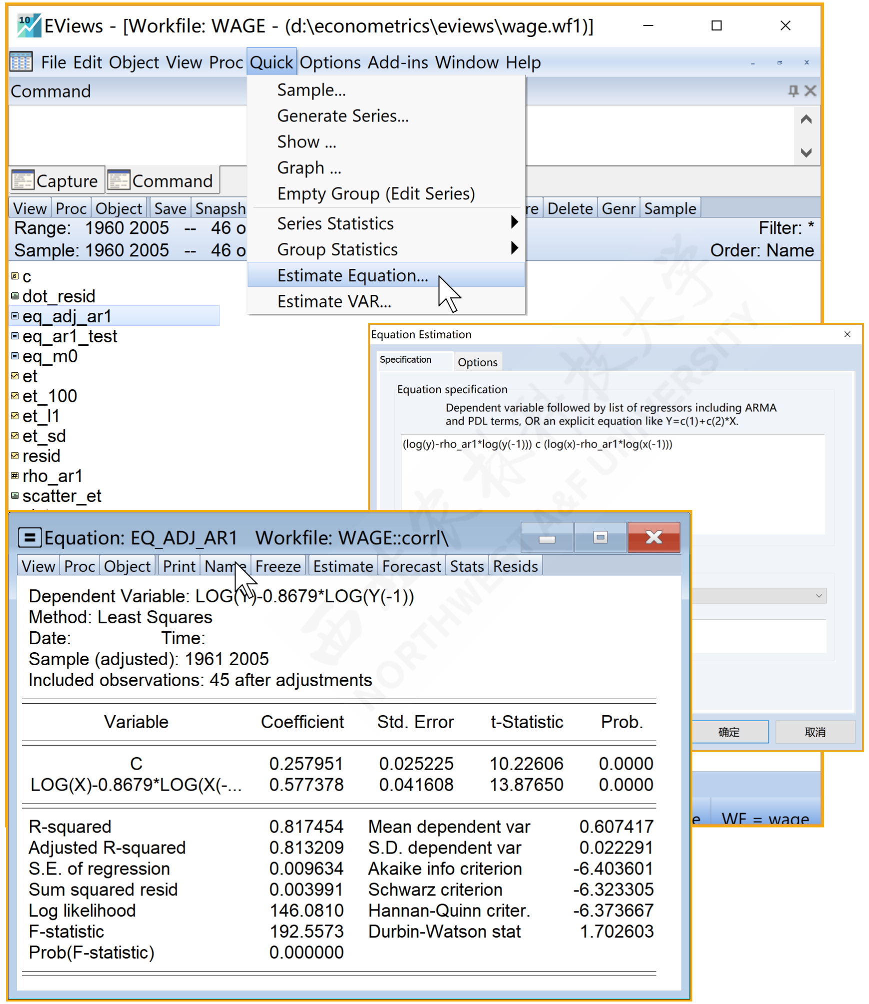
其中，AR(1)模型中的 $\varepsilon_t \sim i.i.d\ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$。

案例矫正：基于残差辅助方程（EViews软件）



基于残差辅助方程近似计算自相关系数

案例矫正：基于残差辅助方程（EViews软件）



基于残差辅助方程的广义差分矫正操作

案例矫正：基于残差辅助方程（EViews软件）

Equation: EQ_ADJ_AR1 Workfile: WAGE::corrl\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: LOG(Y)-0.8679*LOG(Y(-1))
Method: Least Squares
Date: Time:
Sample (adjusted): 1961 2005
Included observations: 45 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.257951	0.025225	10.22606	0.0000
LOG(X)-0.8679*LOG(X(-...	0.577378	0.041608	13.87650	0.0000

R-squared	0.817454	Mean dependent var	0.607417
Adjusted R-squared	0.813209	S.D. dependent var	0.022291
S.E. of regression	0.009634	Akaike info criterion	-6.403601
Sum squared resid	0.003991	Schwarz criterion	-6.323305
Log likelihood	146.0810	Hannan-Quinn criter.	-6.373667
F-statistic	192.5573	Durbin-Watson stat	1.702603
Prob(F-statistic)	0.000000		

基于残差辅助方程的广义差分矫正报告

广义差分方程法：基于D-W统计量

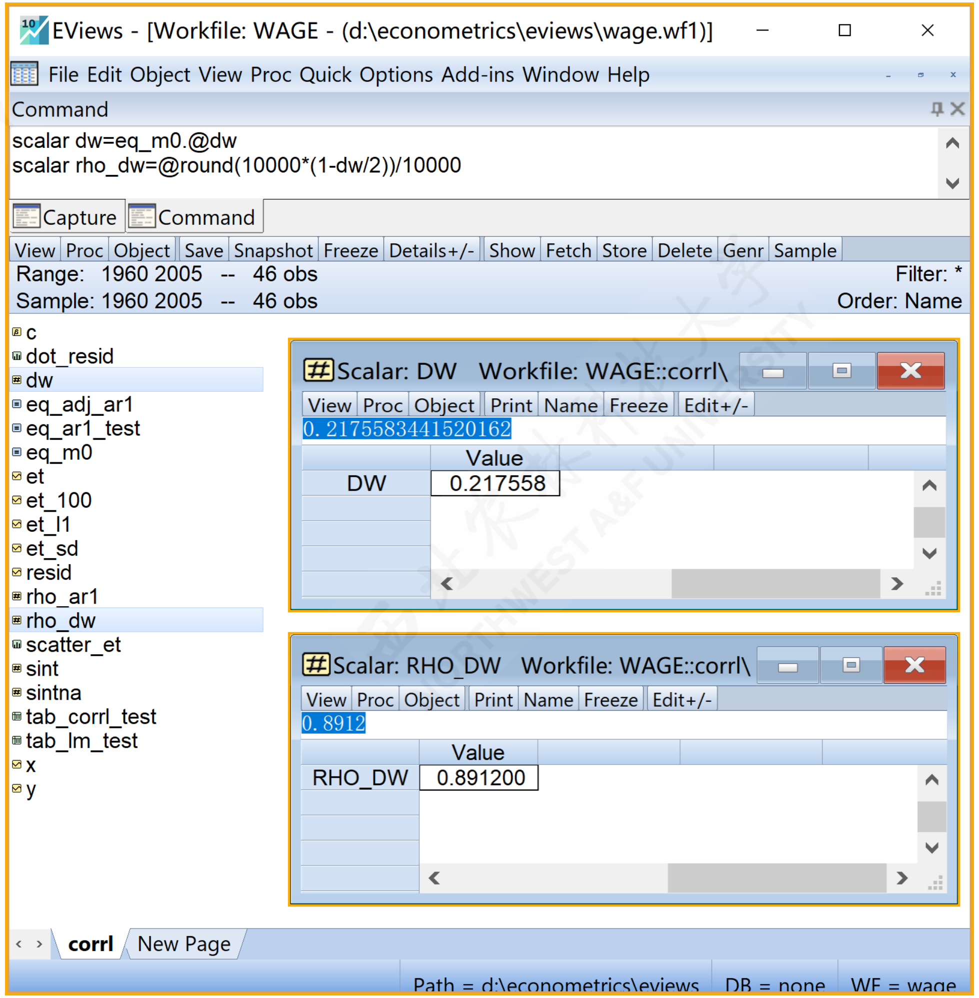
矫正思路：如果主模型随机干扰项的自相关系数未知，则可以基于Durbin-Waston检验的d统计量计算得到 $\hat{\rho}$，再根据 $\rho \simeq \hat{\rho}$ 用广义差分变换得到新模型，容易证明新模型将不再有自相关问题。

如下将展示一阶自相情形下的广义差分变换的理论过程

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + u_t && \text{PRM} \\
u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t && \text{AR(1)} \\
d &\simeq 2(1-\hat{\rho}) && \text{Durbin-Waston} \\
\hat{\rho} &\simeq 1 - d/2 && \\
\rho &\simeq \hat{\rho} && \\
\rho Y_{t-1} &= rho\beta_1 + \beta_2 \rho X_{2t-1} + \rho u_{t-1} && \text{Lag 1 Model} \\
(Y_t - \rho Y_{t-1}) &= \beta_1(1-\rho) + \beta_2(X_{2t} - \rho X_{2t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1}) && \Delta 1 \text{ Model} \\
Y_t^* &= \beta_1^* + \beta_2^* X_{2t}^* + \varepsilon_t && \text{Adjusted Model}
\end{aligned}
$$

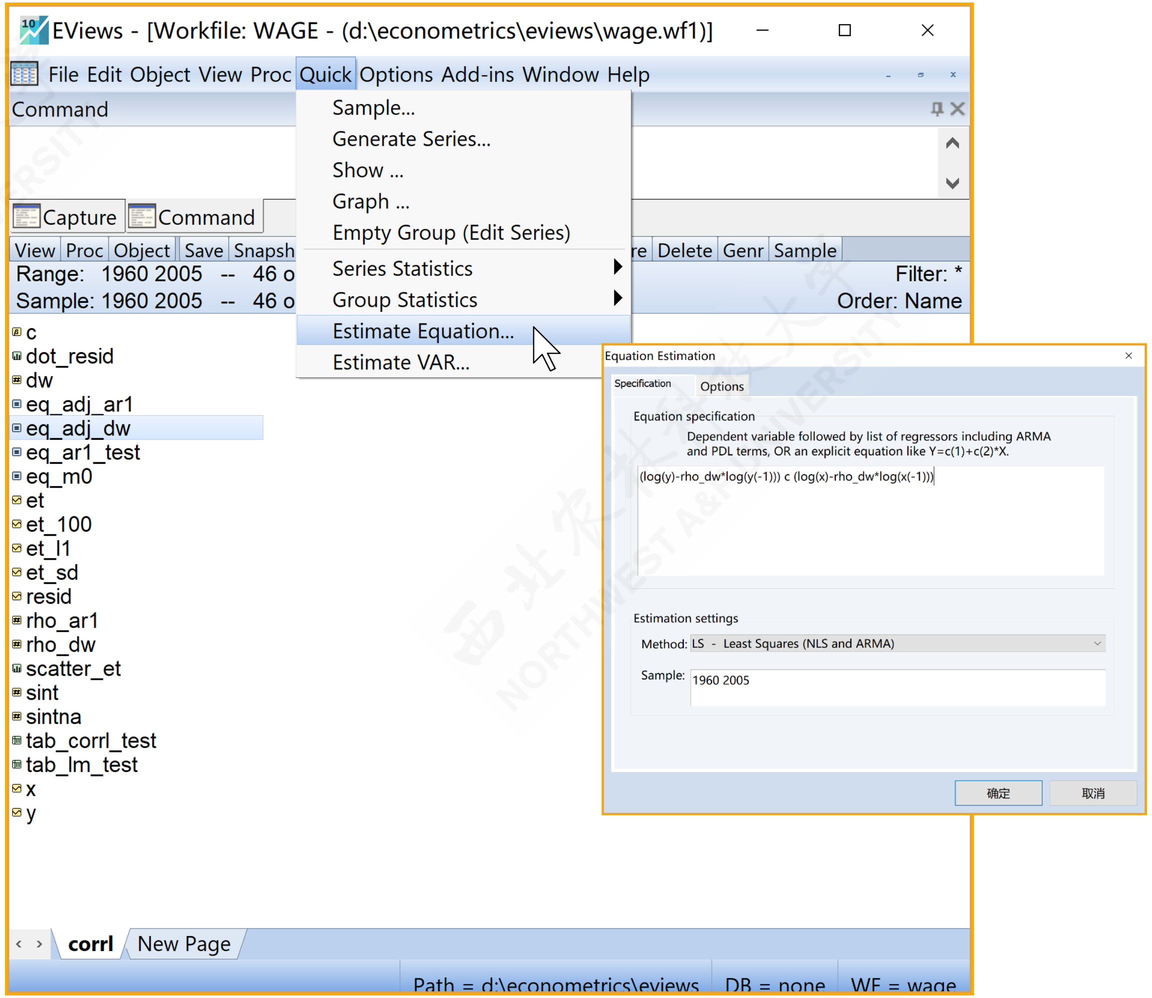
其中，AR(1)模型中的 $\varepsilon_t \sim i.i.d\ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$。

案例矫正：基于D-W统计量



基于Durbin-Waston统计量近似计算自相关系数

案例矫正：基于D-W统计量



基于Durbin-Waston统计量的广义差分模型矫正操作

案例矫正：基于D-W统计量

Equation: EQ_ADJ_DW Workfile: WAGE::corrl\

View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: LOG(Y)-0.8912*LOG(Y(-1))
Method: Least Squares
Date: Time:
Sample (adjusted): 1961 2005
Included observations: 45 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.219629	0.024824	8.847427	0.0000
LOG(X)-0.8912*LOG(X(-...	0.563819	0.049317	11.43245	0.0000

R-squared	0.752448	Mean dependent var	0.502951
Adjusted R-squared	0.746691	S.D. dependent var	0.019173
S.E. of regression	0.009650	Akaike info criterion	-6.400369
Sum squared resid	0.004004	Schwarz criterion	-6.320073
Log likelihood	146.0083	Hannan-Quinn criter.	-6.370435
F-statistic	130.7009	Durbin-Watson stat	1.723983
Prob(F-statistic)	0.000000		

基于Durbin-Waston统计量的广义差分模型矫正报告

可行广义最小二乘法(FGLS)：基于迭代法

矫正思路：

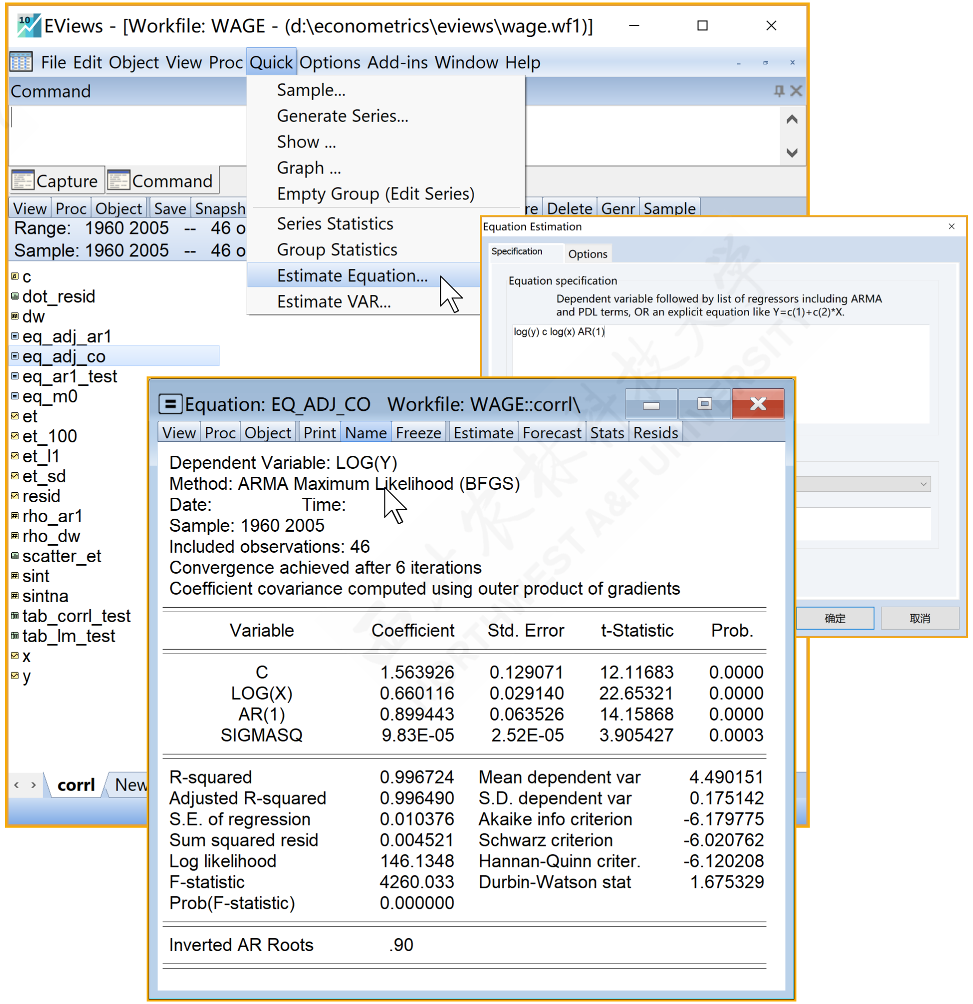
- 如果主模型随机干扰项的自相关系数未知，而且存在高阶自相关情形，则可以使用基于迭代的**可行广义最小二乘法**(FGLS)计算得到 $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \cdots, \hat{\rho}_p \quad p \in (1, 2, \cdots)$，再根据 $\rho \simeq \hat{\rho}$用广义差分变换得到新模型，容易证明新模型将不再有自相关问题。
- 这些迭代方法主要包括:
  - **科克伦-奥克特迭代法**(Cochrane-Orcutt iterative procedure)；
  - 科克伦-奥克特两步法(Cochrane-Orcutt two-step procedure)；
  - 德宾两步法(Durbin two-step procedure)；
  - 希尔德雷思-卢扫描或搜寻程序(Hildreth-Lu scanning or search procedure) 等

如下将展示**科克伦-奥克特迭代法**下对二阶自相关（$AR(p), p=2$）情形下的广义差分变换的理论过程

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + u_t && \text{PRM} \\
u_t &= \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t && \text{AR(2)} \\
\cdots & && \text{Cochrane-Orcutt iterative} \\
\rho_p &\simeq \hat{\rho}_p \\
\rho_1 Y_{t-1} &= \rho_1 \beta_1 + \beta_2 \rho_1 X_{2t-1} + \rho_1 u_{t-1} && \text{Lag 1 Model} \\
\rho_2 Y_{t-2} &= \rho_2 \beta_1 + \beta_2 \rho_2 X_{2t-2} + \rho_2 u_{t-2} && \text{Lag 2 Model}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(Y_t - \rho_1 Y_{t-1} - \rho_2 Y_{t-2}) &= \beta_1(1-\rho_1-\rho_2) + \beta_2(X_{2t} - \rho_1 X_{2t-1} - \rho_2 X_{2t-2}) \\
&\quad + (u_t - \rho_1 u_{t-1} - \rho_2 u_{t-2}) && \Delta 2 \text{ Model} \\
Y_t^* &= \beta_1^* + \beta_2^* X_{2t}^* + \varepsilon_t && \text{Adjusted Model}
\end{aligned}
$$

矫正案例：基于迭代法（FGLS）



基于科克伦-奥克特迭代法的FGLS模型矫正Eviews操作

矫正案例：基于迭代法（FGLS）

Equation: EQ_ADJ_CO   Workfile: WAGE::corrl\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: LOG(Y)
Method: ARMA Maximum Likelihood (BFGS)
Date: Time:
Sample: 1960 2005
Included observations: 46
Convergence achieved after 6 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

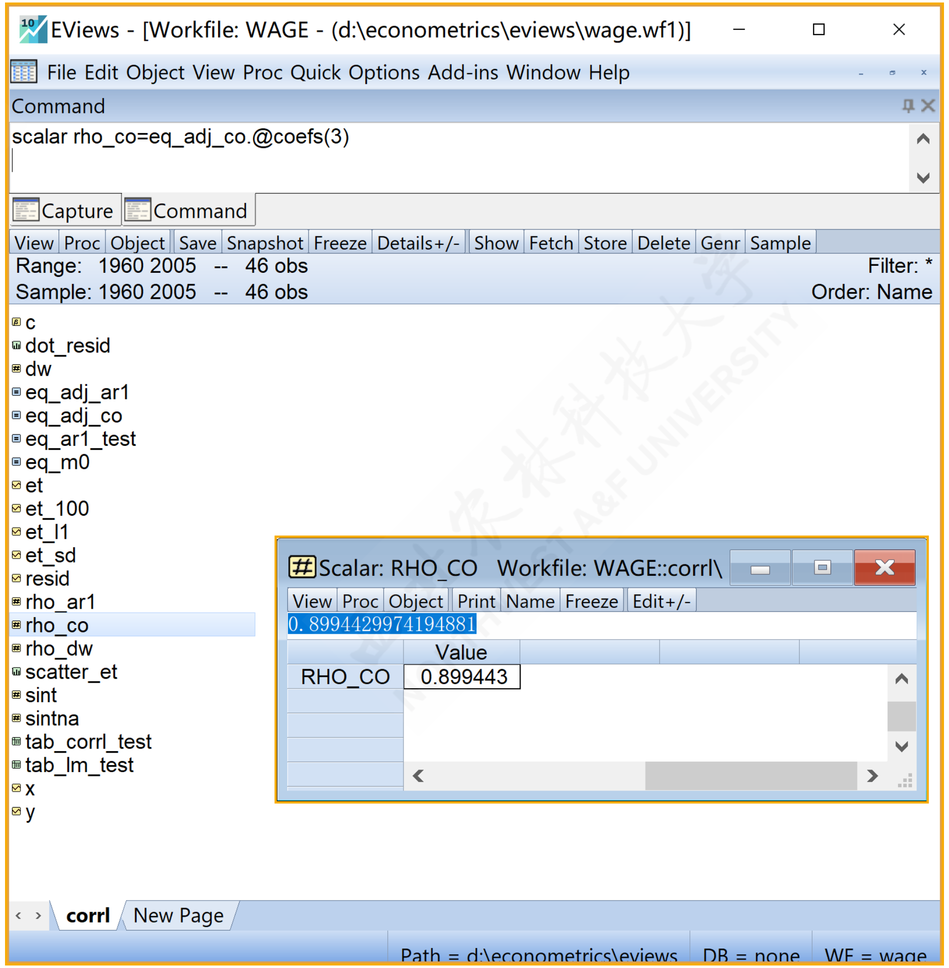
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.563926	0.129071	12.11683	0.0000
LOG(X)	0.660116	0.029140	22.65321	0.0000
AR(1)	0.899443	0.063526	14.15868	0.0000
SIGMASQ	9.83E-05	2.52E-05	3.905427	0.0003

R-squared	0.996724	Mean dependent var	4.490151
Adjusted R-squared	0.996490	S.D. dependent var	0.175142
S.E. of regression	0.010376	Akaike info criterion	-6.179775
Sum squared resid	0.004521	Schwarz criterion	-6.020762
Log likelihood	146.1348	Hannan-Quinn criter.	-6.120208
F-statistic	4260.033	Durbin-Watson stat	1.675329
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted AR Roots   .90

基于科克伦-奥克特迭代法的FGLS模型矫正Eviews报告

矫正案例：基于迭代法（FGLS）



基于科克伦-奥克特迭代法近似计算的自相关系数

一致性标准误校正法（HAC）：尼威-威斯特(Newey-West)

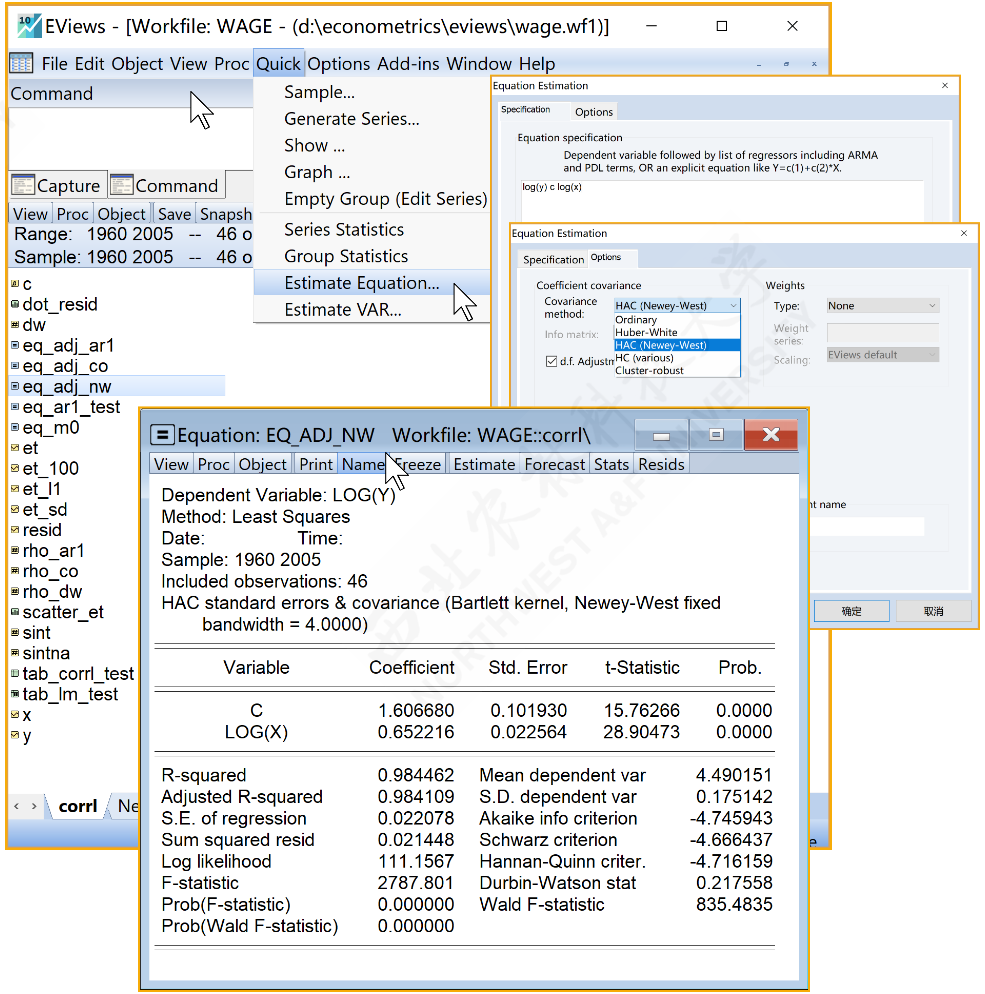
目标：直接用尼威-威斯特(Newey-West)一致性标准误矫正流程方法，构建回归分析模型，此时模型的自相关问题将会有所缓解。

矫正思路：利用统计软件（Eviews或R等），进行基于尼威-威斯特(Newey-West)一致性标准误矫正程序的建模分析。

理论提示：（数学表达和证明过程略）

- 异方差-自相关一致性标准误（heteroscedasticity-autocorralation consistent standard errors，HAC）也被简称为尼威-威斯特一致性标准误(Newey-West consistent standard errors)
- 尼威-威斯特(Newey-West)一致性标准误矫正程序或菜单，在主流的统计软件里都会配置
- 尼威-威斯特(Newey-West)一致性标准误矫正程序，严格意义上对于大样本数据是有效的，因此不太适合于小样本数据的情形。

矫正案例：一致性标准误校正法（HAC）



尼威-威斯特(Newey-West)矫正法的操作

矫正案例：一致性标准误校正法（HAC）

Equation: EQ_ADJ_NW Workfile: WAGE::corrl\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: LOG(Y)
Method: Least Squares
Date: Time:
Sample: 1960 2005
Included observations: 46
HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 4.0000)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.606680	0.101930	15.76266	0.0000
LOG(X)	0.652216	0.022564	28.90473	0.0000

R-squared	0.984462	Mean dependent var	4.490151
Adjusted R-squared	0.984109	S.D. dependent var	0.175142
S.E. of regression	0.022078	Akaike info criterion	-4.745943
Sum squared resid	0.021448	Schwarz criterion	-4.666437
Log likelihood	111.1567	Hannan-Quinn criter.	-4.716159
F-statistic	2787.801	Durbin-Watson stat	0.217558
Prob(F-statistic)	0.000000	Wald F-statistic	835.4835
Prob(Wald F-statistic)	0.000000		

尼威-威斯特(Newey-West)矫正法的Eviews报告

本章结束