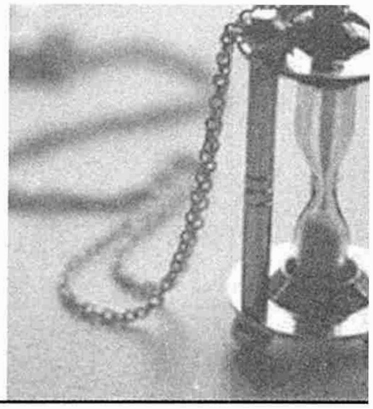


第五章　时间序列计量经济学模型

计量经济分析中所用的三大类重要数据（截面数据、时间序列数据、面板数据）中，时间序列数据是其中最常见，也是最重要的一类数据。

经典计量经济学模型，如果以独立随机抽样的截面数据为样本，在模型设定是正确的条件下，模型随机扰动项满足极限法则和由极限法则导出的基本假设，继而进行的参数估计和统计推断是可靠的。以时间序列数据为样本，时间序列性破坏了随机抽样的假定，那么，经典计量经济学模型的数学基础能否被满足，自然成为一个有待讨论的问题。对照极限法则和时间序列的平稳性条件，人们发现，如果所有时间序列是平稳的，时间序列的平稳性可以替代随机抽样假定，模型随机干扰项仍然满足极限法则。所以，采用时间序列数据建立计量经济学模型，首先必须对用统计数据构造的时间序列进行平稳性检验。这就是本章 § 5.2 节将要讨论的问题。

事实上，经济时间序列大都是非平稳的，那么，在非平稳时间序列之间能否建立计量经济学结构模型？还需要对这些时间序列进行协整检验。本章 § 5.3 节将进行专门讨论。

采用时间序列数据建立计量经济学模型，无论是平稳时间序列还是非平稳时间序列，模型随机误差项一般都存在序列相关，这就违背了经典模型的一个重要的基本假设。所以模型的序列相关性肯定是时间序列计量经济学模型必须重点讨论的一个问题。由于在时间序列的平稳性检验和协整检验中都涉及序列相关，所以，在本章中将它作为第一节（§ 5.1 节）讨论的内容。

关于经典的平稳时间序列分析模型，即自回归模型（AR）、移动平均模型（MA）、自回归移动平均模型（ARMA）等，在一般的时间序列分析教科书中，都有详细的介绍，也经常被作为计量经济学教科书的一部分，例如本书第三版。这类模型主要分析单个经济变量在不同时点之间的关系，以用于该变量的预测，并不涉及不同变量之间关系的分析，不属于计量经济学结构模型。考虑到教科书的篇幅和教学学时的限制，本章不讨论该部分内容。

向量自回归模型（VAR）已经成为一类广泛应用的现代时间序列分析模型，它实际上是自回归模型（AR）的扩展。由 VAR 模型导出的格兰杰因果关系检验，在时间序列计量经济学模型建模时被广泛应用。为了讨论格兰杰因果关系检验，本章 § 5.4 节将对自回归模型和向量自回归模型的概念进行必要的介绍。

§ 5.1　时间序列模型的序列相关性

多元线性回归模型的基本假设之一是模型的随机干扰项相互独立或不相关。如果模型的随机干扰项违背了相互独立的基本假设，称为存在**序列相关性**(serial correlation)。

对于截面数据模型，如果样本是独立随机抽取的，则从理论上保证了模型的随机干扰项相互独立，不存在序列相关；如果样本不是独立随机抽取的，例如采用我国 31 个省、市、自治区的截面数据为样本，模型的随机干扰项也可能存在序列相关。截面数据模型存在序列相关也称为空间相关，属于近年来发展的空间计量经济学的内容，本节不予讨论。本节专门讨论时间序列模型的序列相关问题，在模型表达式中，将代表不同样本点的下标 i 用 t 表示。

一、序列相关性

对于模型

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \cdots + \beta_k X_{tk} + \mu_t, \quad t = 1, 2, \cdots, T \tag{5.1.1}$$

在其他假设仍成立的条件下，随机干扰项序列相关即意味着

$$\mathrm{Cov}(\mu_i, \mu_j) = \mathrm{E}(\mu_i \mu_j) \neq 0$$

或

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\boldsymbol{\mu}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}') &= \begin{pmatrix} \sigma^2 & \cdots & E(\mu_1\mu_T) \\ \vdots & & \vdots \\ E(\mu_T\mu_1) & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \cdots & \sigma_{1T} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{T1} & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix} \\ &= \sigma^2 \boldsymbol{\Omega} \neq \sigma^2 \boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

如果仅存在

$$\mathrm{E}(\mu_t \mu_{t+1}) \neq 0, \quad t = 1, 2, \cdots, T-1 \tag{5.1.3}$$

则称为**一阶序列相关**或**自相关**(autocorrelation)，这是最常见的一种序列相关问题。自相关往往可写成如下形式：

$$\mu_t = \rho \mu_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad -1 < \rho < 1 \tag{5.1.4}$$

其中 ρ 称为**自协方差系数**(coefficient of autocovariance)或**一阶自相关系数**(first-order coefficient of autocorrelation)，ε_i 是满足以下标准普通最小二乘法假定的随机干扰项：

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0, \qquad \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2, \qquad \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0 \quad (s \neq 0)$$

二、实际经济问题中的序列相关性

实际经济问题中，序列相关性产生的原因主要来自以下三个方面。

1．经济变量固有的惯性

大多数经济时间数据都有一个明显的特点，就是它的惯性，表现在时间序列数据不同时间的前后关联上。例如，以绝对收入假设为理论假设，以时间序列数据为样本建立居民总消费函数模型：

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \mu_t, \quad t = 1, 2, \cdots, T$$

我们知道，一般情况下居民总消费(C)除受总收入(Y)影响外，还受其他因素影响，如消费习惯等。但这些因素没有包括在解释变量中，它们对消费量的影响被包含在随机干扰项中。如果该项影响构成随机干扰项的主要部分，则可能出现序列相关性，即对于不同的年份，由于消费习惯等因素的惯性，它们对消费量的影响也是具有内在联系的。于是在不同的样本点之间，随机干扰项出现了相关，从而产生了序列相关性。更进一步分析，在这个例子中，随机干扰项之间表现为正相关。

又比如，在如下农产品供给模型中：

$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_{t-1} + \mu_t$$

农产品供给(Q)对价格(P)的反映本身存在一个滞后期，这意味着，农户在第 t 年的过量生产(使该期价格下降)很可能导致在第 t+1 年削减产量；反之，第 t 年的减产又导致第 t+1 年的增产。这时，随机干扰项往往表现出负相关的特征。

2．模型设定的偏误

所谓模型**设定偏误**(specification error)是指所设定的模型“不正确”，主要表现在模型中丢掉了重要的解释变量或模型函数形式有偏误。例如，本来应该估计的模型为

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \mu_t$$

但在模型设定中作了下述回归：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + v_t$$

因此，该式中 $v_t = \beta_3 X_{t3} + \mu_t$ 。于是在 X_3 确实影响 Y 的情况下，这种模型设定的偏误往往是导致随机干扰项中一个重要的系统性影响因素，使其呈序列相关性。

又如，如果真实的边际成本回归模型应为

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t1}^2 + \mu_t$$

其中，Y 代表边际成本，X 代表产出量。但建模时设立了如下模型：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + v_t$$

因此，由于 $v_t = \beta_2 X_t^2 + \mu_t$ ，包含了产出的平方对随机干扰项的系统性影响，随机干扰项也呈现序列相关性。

3．数据的“编造”

在实际经济问题中，有时为了需要，有些数据是通过已知数据生成的。因此，新生成的数据与原数据间就有了内在的联系，表现出序列相关性。例如，季度数据来自月度数据的简单平均，这种平均的计算减弱了每月数据的波动而引进了数据中的匀滑性，这

种匀滑性本身就能使随机干扰项中出现系统性的因素，从而出现序列相关性。另外，两个时间点之间的“内插”技术也会导致随机干扰项的序列相关性。

一般经验告诉我们，对于采用时间序列数据作样本的计量经济学问题，由于在不同样本点上解释变量以外的其他因素在时间上的连续性，带来它们对被解释变量的影响的连续性，所以往往存在序列相关性。

三、序列相关性的后果

计量经济学模型一旦出现序列相关性，如果仍采用普通最小二乘法估计模型参数，会产生许多不良后果。

1. 参数估计量非有效

从普通最小二乘估计中关于参数估计量的无偏性和有效性的证明过程可以看出，当计量经济学模型出现序列相关性时，其普通最小二乘参数估计量仍然具有线性无偏性，但不具有有效性。因为在有效性证明中利用了

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\mu\mu}') = \sigma^2 \boldsymbol{I}$$

即同方差性和相互独立性条件。而且，在大样本情况下，参数估计量虽然具有一致性，但仍然不具有渐近有效性。

2. 变量的显著性检验失去意义

在变量的显著性检验中，t 统计量是建立在参数方差正确估计基础之上的，这只有当随机干扰项具有同方差性和相互独立性时才能成立。如果存在序列相关性，估计的参数方差 $S_{\hat{\beta}_j}$ 出现偏误(偏大或偏小)，t 检验就失去意义。其他检验也是如此。

如对一元回归模型

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \mu_t, \quad t = 1, 2, \cdots, T$$

的普通最小二乘估计有

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \sum k_t \mu_t = \beta_1 + \frac{\sum x_t \mu_t}{\sum x_t^2}$$

可以证明，存在(5.1.4)式所示的一阶序列相关的情况下正确的 $\hat{\beta}_1$ 的方差应为

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} + \frac{2\sigma^2}{\sum x_t^2}\left[\rho \frac{\sum_{t=1}^{T-1} x_t x_{t+1}}{\sum x_t^2} + \rho^2 \frac{\sum_{t=1}^{T-2} x_t x_{t+2}}{\sum x_t^2} + \cdots + \rho^{T-1} \frac{x_1 x_T}{\sum x_t^2}\right] \tag{5.1.5}$$

而普通最小二乘法仍按下式给出 $\hat{\beta}_1$ 的方差估计

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} \tag{5.1.6}$$

显然，只有序列无关性满足时，(5.1.5)式与(5.1.6)式才会相同，否则普通最小二乘法给出

的估计结果就会出现偏误，在有偏误的方差基础上构造的t检验也就失去了意义。

3. 模型的预测失效

区间预测与参数估计量的方差有关，在方差估计有偏误的情况下，预测估计就不准确，预测精度降低。所以，当模型出现序列相关性时，它的预测功能失效。

四、序列相关性的检验

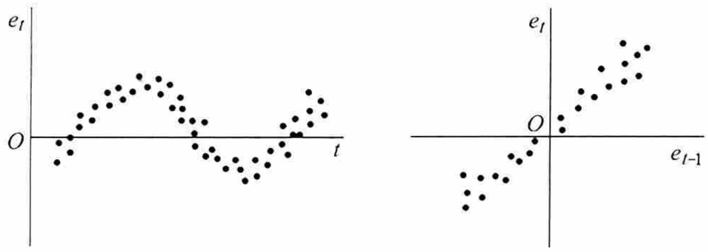
序列相关性的检验方法有多种，如冯诺曼比检验法、回归检验法、D.W.检验法等。**这些检验方法的共同思路是：首先采用普通最小二乘法估计模型，以求得残差序列e_t：**

$$\tilde{e}_t = Y_t - (\hat{Y}_t)_{\mathrm{OLS}}$$

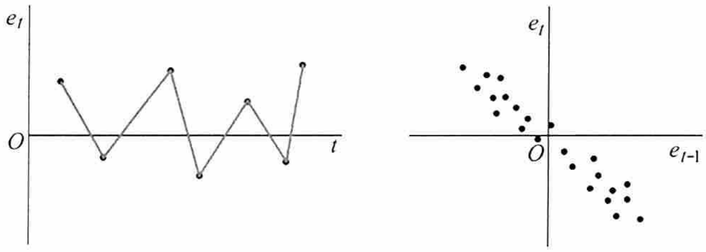
由于残差e_t是μ_t的“近似估计量”，因此分析e_t自身的相关性以达到判断随机干扰项是否具有序列相关性的目的。下面介绍几种常用的检验方法。

1. 图示法

由于残差e_t可以作为μ_t的估计，因此，如果μ_t存在序列相关性，必然会由残差项e_t反映出来，因此可利用e_t的变化图形来判断随机干扰项的序列相关性，如图 5.1.1 所示。



(a) 正序列相关（正自相关）



(b) 负序列相关（负自相关）

图 5.1.1 残差项的序列相关性

2. 回归检验法

以e_t为被解释变量，以各种可能的相关量，诸如e_{t-1}，e_{t-2}，e_t^2等为解释变量，建立各种方程：

$$e_t = \rho e_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad t=2,\cdots,T$$

$$e_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad t=3,\cdots,T$$

…………

对方程进行估计并进行显著性检验，如果存在某一种函数形式，使得方程显著成立，则说明原模型存在序列相关性。回归检验法的优点是一旦确定了模型存在序列相关性，也就同时知道了相关的形式，而且它适用于任何类型的序列相关性问题的检验。

3. D.W.检验法

D.W.检验是杜宾(J. Durbin)和瓦森(G.S. Watson)于 1951 年提出的一种检验序列自相关的方法，该方法的假定条件是：

（1）解释变量 X 非随机；

（2）随机干扰项 μ_t 为一阶自回归形式：

$$\mu_t = \rho\mu_{t-1} + \varepsilon_t$$

（3）回归模型中不应含有滞后应变量作为解释变量，即不应出现下列形式：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \cdots + \beta_k X_{tk} + \gamma Y_{t-1} + \mu_t$$

（4）回归模型含有截距项。

杜宾和瓦森针对原假设 $H_0: \rho = 0$， 即 μ_t 不存在一阶自回归，构造如下统计量：

$$\text{D.W.} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \tag{5.1.7}$$

该统计量的分布与出现和给定样本中的 X 值有复杂的关系，因此其精确的分布很难得到。但他们成功地导出了临界值的上限 d_U 与下限 d_L，且这些上下限只与样本容量 T 和解释变量的个数 k 有关，而与解释变量的取值无关。因此，在检验时，只需计算该统计量的值，再根据样本容量 T 和解释变量数目 k 查 D.W.分布表，得到临界值 d_L 和 d_U，然后按照下列准则考察计算得到的 D.W.值，以判断模型的自相关状态：

若 $0<\text{D.W.}<d_L$，则存在正自相关；

若 $d_L<\text{D.W.}<d_U$，则不能确定；

若 $d_U<\text{D.W.}<4-d_U$，则无自相关；

若 $4-d_U<\text{D.W.}<4-d_L$，则不能确定；

若 $4-d_L<\text{D.W.}<4$，则存在负自相关。

也就是说，当 D.W.值在 2 附近时，模型不存在一阶自相关。其证明过程如下：

展开 D.W.统计量：

$$\text{D.W.} = \frac{\sum_{t=2}^{T} e_t^2 + \sum_{t=2}^{T} e_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2} \tag{5.1.8}$$

当T较大时，$\sum_{t=2}^{T} e_t^2, \sum_{t=2}^{T} e_{t-1}^2, \sum_{t=1}^{T} e_t^2$ 大致相等，则(5.1.8)式可以化简为

$$\text{D.W.} \approx 2\left(1-\frac{\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}\right) \approx 2(1-\rho)$$

其中，$\frac{\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2} \approx \frac{\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} e_t^2} = \rho$ 为一阶自相关模型(5.1.4)式的参数估计。

如果存在完全一阶正相关，则 $\rho \approx 1$，　$\text{D.W.} \approx 0$；

如果存在完全一阶负相关，则 $\rho \approx -1$，　$\text{D.W.} \approx 4$；

如果完全不相关，则 $\rho = 0$，　$\text{D.W.} = 2$。

从判断准则中看到，存在一个不能确定的D.W.值区域，这是这种检验方法的一大缺陷。而且D.W.检验只能检验一阶自相关，并且对存在滞后被解释变量的模型无法检验。

4. 拉格朗日乘数（LM）检验

拉格朗日乘数检验克服了D.W.检验的缺陷，适合于高阶序列相关及模型中存在滞后被解释变量的情形。它是由布劳殊(Breusch)与戈弗雷(Godfrey)于1978年提出的，也称为GB检验。

对于模型(5.1.1)式，如果怀疑随机干扰项存在p阶序列相关：

$$\mu_t = \rho_1 \mu_{t-1} + \rho_2 \mu_{t-2} + \cdots + \rho_p \mu_{t-p} + \varepsilon_t \tag{5.1.9}$$

拉格朗日乘数检验就可用来检验如下受约束回归方程：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \cdots + \beta_k X_{tk} + \rho_1 \mu_{t-1} + \cdots + \rho_p \mu_{t-p} + \varepsilon_t \tag{5.1.10}$$

约束条件为

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_p = 0 \tag{5.1.11}$$

如果约束条件H_0为真，则LM统计量服从大样本下自由度为p的渐近χ^2分布：

$$LM = nR^2 \sim \chi^2(p) \tag{5.1.12}$$

其中，$(T-p)$, R^2分别为如下辅助回归的样本容量与可决系数：

$$\tilde{e}_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \cdots + \beta_k X_{tk} + \rho_1 \tilde{e}_{t-1} + \cdots + \rho_p \tilde{e}_{t-p} + \varepsilon_t \tag{5.1.13}$$

$\tilde{e}_t$为原模型(5.1.1)式经普通最小二乘估计的残差项。给定显著性水平α，查自由度为p的χ^2分布的相应临界值$\chi_\alpha^2(p)$，如果计算的LM统计量的值超过该临界值，则拒绝约束条件为真的原假设，表明可能存在直到p阶的序列相关性。在实际检验中，可从1阶、2阶……逐次向更高阶检验，并用辅助回归(5.1.13)式中各$\tilde{e}_t$前参数的显著性来帮助判断序列相关的阶数。

五、序列相关的补救

如果模型被检验证明存在序列相关性，则需要发展新的方法估计模型。与模型出现异方差的情形相类似，有两种解决途径：一是变换原模型为不存在序列相关的新模型，再采用普通最小二乘法估计，这就是所谓的**广义最小二乘法**和**广义差分法**(generalized difference method)；另一条途径是仍采用普通最小二乘法估计原模型，之后再对参数估计量的方差或标准差进行修正，称为**序列相关稳健估计法**（serial correlation-robust method）。

1. 广义最小二乘法

广义最小二乘法，顾名思义，是最具有普遍意义的最小二乘法，普通最小二乘法和加权最小二乘法是它的特例。

一般情况下，对于模型

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\mu} \tag{5.1.14}$$

如果存在序列相关性，同时存在异方差性，即有

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}') = \mathrm{E}(\boldsymbol{\mu\mu}') = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_T^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \boldsymbol{\Omega}$$

显然，$\boldsymbol{\Omega}$ 是对称正定矩阵，因此存在一可逆矩阵 $\boldsymbol{D}$，使得

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{DD}'$$

用 $\boldsymbol{D}^{-1}$ 左乘(5.1.14)式两边，得到一个新的模型：

$$\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\mu} \tag{5.1.15}$$

即

$$\boldsymbol{Y}_* = \boldsymbol{X}_* \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mu}_*$$

该模型具有同方差性和随机干扰项相互独立性。因为

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\boldsymbol{\mu}_* \boldsymbol{\mu}_*') &= \mathrm{E}[\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\mu\mu}'(\boldsymbol{D}^{-1})'] = \boldsymbol{D}^{-1}\mathrm{E}(\boldsymbol{\mu\mu}')(\boldsymbol{D}^{-1})' \\ &= \boldsymbol{D}^{-1}\sigma^2\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{D}^{-1})' = \boldsymbol{D}^{-1}\sigma^2\boldsymbol{DD}'(\boldsymbol{D}')^{-1} = \sigma^2\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

于是，可以用普通最小二乘法估计模型(5.1.15)式，记参数估计量为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_*$，则

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_* &= (\boldsymbol{X}_*'\boldsymbol{X}_*)^{-1}\boldsymbol{X}_*'\boldsymbol{Y}_* \\ &= [\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{D}^{-1})'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{X}]^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{D}^{-1})'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{Y} \\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Y}\end{aligned} \tag{5.1.16}$$

这就是原模型(5.1.14)式的广义最小二乘估计量，是无偏的、有效的估计量。

由上面的推导过程可知，只要知道随机干扰项的方差-协方差矩阵 $\sigma^2\boldsymbol{\Omega}$，就可采用广义最小二乘法得到参数的最佳线性无偏估计量。然而若只有 T 个样本点，要对包括各

β_j 在内的 $\dfrac{T(T-1)}{2}+k+2$ 个未知参数进行估计是困难的。这就需要对随机干扰项自相关的结构事先给出必要的假设。最常见的是假设随机干扰项具有一阶序列相关性：

$$\mu_t=\rho\mu_{t-1}+\varepsilon_t\,,\qquad -1<\rho<1 \tag{5.1.17}$$

这时，可以证明(参见《计量经济学学习指南与练习（第二版）》，潘文卿，李子奈编著，高等教育出版社，2015)

$$\mathrm{Var}(\mu_t)=\frac{1}{1-\rho^2}\sigma_\varepsilon^2=\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(\mu_t,\mu_{t-s})=\rho^s\frac{1}{1-\rho^2}\sigma_\varepsilon^2=\rho^s\sigma^2$$

于是

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{\mu})=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}1 & \rho & \cdots & \rho^{T-1}\\ \rho & 1 & \cdots & \rho^{T-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \cdots & 1\end{pmatrix}=\sigma^2\boldsymbol{\Omega} \tag{5.1.18}$$

易知

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1\end{pmatrix}$$

从而

$$\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{pmatrix}\sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1\end{pmatrix} \tag{5.1.19}$$

2. 广义差分法

广义差分法是一类克服序列相关性的有效方法，被广泛地采用。它是将原模型变换为满足普通最小二乘法的差分模型，再进行普通最小二乘估计。

如果原模型存在

$$\mu_t=\rho_1\mu_{t-1}+\rho_2\mu_{t-2}+\cdots+\rho_p\mu_{t-p}+\varepsilon_t \tag{5.1.20}$$

可以将原模型变换为

$$\begin{aligned}&Y_t-\rho_1Y_{t-1}-\cdots-\rho_pY_{t-p}\\&=\beta_0(1-\rho_1-\cdots-\rho_p)+\beta_1(X_{t1}-\rho_1X_{t-1,1}-\cdots-\rho_pX_{t-p,1})+\cdots\end{aligned}$$

$$+\beta_k(X_{tk}-\rho_1 X_{t-1,k}-\cdots-\rho_p X_{t-p,k})+\varepsilon_t$$

$$t=1+p,2+p,\cdots,T \tag{5.1.21}$$

模型(5.1.21)式为广义差分模型，该模型不存在序列相关性问题。采用普通最小二乘法估计该模型得到的参数估计量，即为原模型参数无偏且有效的估计量。

需要指出的是，广义差分法就是前面讲述的广义最小二乘法，但是却损失了部分样本观测值。例如，在一阶序列相关的情况下，广义差分是对下面的差分模型进行普通最小二乘回归：

$$Y_t-\rho Y_{t-1}=\beta_0(1-\rho)+\beta_1(X_{t1}-\rho X_{t-1,1})+\cdots+\beta_k(X_{tk}-\rho X_{t-1,k})+\varepsilon_t\,,\quad t=2,3,\cdots,T$$

或

$$Y_t^*=\beta_0(1-\rho)+\beta_1 X_{t1}^*+\cdots+\beta_k X_{tk}^*+\varepsilon_t\,,\qquad t=2,3,\cdots,T \tag{5.1.22}$$

这一变换相当于(5.1.19)式的 $\boldsymbol{D}^{-1}$ 去掉第一行后左乘原模型(5.1.14)式，即运用了广义最小二乘法，但第一次观测值被排除了。

尽管在大样本中广义差分法与广义最小二乘法的估计结果相近，但在小样本中，观测值的损失可能会对估计结果有所影响。因此，在广义差分变换中，有时需弥补这一损失。例如，在一阶序列相关情况下，对损失的第一次观测值可进行如下的**普莱斯-温斯特变换**(Prais-Winsten transformation)：

$$Y_1^*=\sqrt{1-\rho^2}\,Y_1\,,\qquad X_{1j}^*=\sqrt{1-\rho^2}\,X_{1j}\quad (j=1,2,\cdots,k)$$

这样，广义差分法的估计结果完全等同于广义最小二乘估计量。

3. 随机干扰项相关系数的估计

无论应用广义最小二乘法，还是应用广义差分法，都必须已知不同样本点之间随机干扰项的相关系数 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_p$。实际上，人们并不知道它们的具体数值，所以必须首先对它们进行估计。于是发展了许多估计方法，但基本思路大都是采用普通最小二乘法估计原模型，得到随机干扰项的“近似估计值”，然后利用该“近似估计值”求得随机干扰项相关系数的估计量。不同的方法旨在力图使得这些估计量更加逼近实际。下面介绍常用的科克伦-奥科特(Cochrane- Orcutt)迭代法。

首先，采用普通最小二乘法估计原模型，得到随机干扰项的“近似估计值”，以之作为方程(5.1.20)的样本观测值，采用普通最小二乘法估计该方程，得到 $\hat{\rho}_1,\hat{\rho}_2,\cdots,\hat{\rho}_p$，作为随机干扰项的相关系数 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_p$ 的第一次估计值。然后，将上述 $\hat{\rho}_1,\hat{\rho}_2,\cdots,\hat{\rho}_p$ 代入(5.1.21)式，并对之进行普通最小二乘估计，得到 $\hat{\hat{\beta}}_0,\hat{\hat{\beta}}_1,\cdots,\hat{\hat{\beta}}_k$。将 $\hat{\hat{\beta}}_0,\hat{\hat{\beta}}_1,\cdots,\hat{\hat{\beta}}_k$ 代回原模型，求出原模型随机干扰项的新的“近似估计值”，并以之作为方程(5.1.20)的样本观测值，采用普通最小二乘法估计该方程，得到 $\hat{\hat{\rho}}_1,\hat{\hat{\rho}}_2,\cdots,\hat{\hat{\rho}}_p$，作为随机干扰项的相关系数 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_p$ 的第二次估计值。重复上述过程，可得到 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_p$ 的多次迭代值。

关于迭代的次数，可根据具体的问题来定。一般是事先给出一个精度，当相邻两次的 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_p$ 的估计值之差小于这一精度时，迭代终止。实践中，有时只要迭代两次，就可得到较满意的结果。两次迭代过程也称为**科克伦-奥科特两步法**。

需要指出的是，如果各序列相关系数是被估计出来的，则模型参数的估计结果不再是广义最小二乘估计量，而是**可行的广义最小二乘估计量**，该估计方法也称为**可行的广义最小二乘估计**。可行的广义最小二乘估计量不再是无偏的，但却是一致的，而且在科克伦-奥科特迭代法下，估计量也具有渐近有效性。

4. 广义差分法在计量经济学软件中的实现

在 Eviews 计量经济学软件包中，可以采用很简单的方法实现广义差分法参数估计。(5.1.21)式可以改写为

$$
\begin{aligned}
Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \cdots + \beta_k X_{tk} + \\
\rho_1(Y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 X_{t-1,1} - \cdots - \beta_k X_{t-1,k}) + \cdots + \\
\rho_p(Y_{t-p} - \beta_0 - \beta_1 X_{t-p,1} - \cdots - \beta_k X_{t-p,k}) + \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

$$t = 1+p, 2+p, \cdots, T$$

即

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \cdots + \beta_k X_{tk} + \rho_1 \mu_{t-1} + \rho_2 \mu_{t-2} + \cdots + \rho_p \mu_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$t = 1+p, 2+p, \cdots, T$$

当选择普通最小二乘法估计参数时，如果同时选择常数项和 $X_1, X_2, \cdots, X_k$, AR(1), AR(2), $\cdots$, AR(p) 作为解释变量，即可得到参数 $\beta_0, \beta_1, \cdots,\ \beta_k, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_p$ 的估计值。其中 AR(p)表示随机干扰项的 p 阶自回归。在估计过程中自动完成了 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_p$ 的迭代，并显示总迭代次数。

至于选择几阶随机干扰项的自回归项作为解释变量，主要判断依据是 D.W.统计量。所以，一般是先不引入自回归项，采用普通最小二乘法估计参数；根据显示的 D.W.统计量，逐次引入 AR(1), AR(2)，……直到满意为止。

5. 序列相关稳健标准误法

与回归模型随机误差项出现异方差的情况相类似，当模型随机误差项出现序列相关时，普通最小二乘法只是影响到了参数估计量方差或标准差的正确估计，从而无法保证普通最小二乘估计量的有效性，但并不影响估计量的无偏性与一致性。因此，与解决出现异方差时的情况相仿，另一种针对序列相关的修正的估计方法是：仍采用普通最小二乘估计量，但修正其相应的方差。

如何修正普通最小二乘估计量相应的方差呢？尼威(Newey)和韦斯特(West)于 1987 年提出了类似于怀特提出的解决模型出现异方差时的方法，即计算出参数估计量正确的

标准差。换言之，在一元线性回归模型中，对斜率项的估计量 $\hat{\beta}_1$ 的方差，需按(5.1.5)式

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)=\frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}+\frac{2\sigma^2}{\sum x_t^2}\left[\rho\frac{\sum\limits_{t=1}^{T-1}x_t x_{t+1}}{\sum x_t^2}+\rho^2\frac{\sum\limits_{t=1}^{T-2}x_t x_{t+2}}{\sum x_t^2}+\cdots+\rho^{T-1}\frac{x_1 x_T}{\sum x_t^2}\right]$$

进行估计，而不是按普通最小二乘法中的(5.1.6)式

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)=\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

进行估计。当然，尼威和韦斯特给出的计算公式要复杂得多，本教材不再列出。

尼威和韦斯特提出的修正普通最小二乘参数估计量标准误的方法，不仅能在模型随机干扰项只存在序列相关时得到参数估计量的正确标准误，而且当模型随机干扰项同时存在异方差与序列相关时，也能得到参数估计量的正确标准误，因此该标准误也称为异方差-序列相关一致标准误（heteroscedasticity- autocorrelation-consistent standard error），或简称为尼威-韦斯特标准误（Newey-West standard error），该估计参数的方法也称为**序列相关稳健标准误法**（method of serial correlation-rodust standard error）。

可以证明，大样本下尼威-韦斯特标准误是普通最小二乘参数估计量标准误的一致估计。

与存在异方差时的情形相类似，序列相关稳健标准误法虽不能得到有效的估计量，但由于可以得到普通最小二乘估计量正确的方差估计，从而使得以估计量方差为基础的各种统计检验不再失效，建立的预测区间也更加可信，因此序列相关稳健标准误法就成为在不能较好地实施广义最小二乘法时，消除异方差性不良后果的主要手段。

六、虚假序列相关问题

如果随机干扰项的序列相关是在模型设定中遗漏了重要的解释变量或对模型的函数形式设定有误时出现的，这种情形可称为**虚假序列相关**，应在模型设定中排除。因此，这里有两个层次的问题需要判断。第一层次的问题是如果检验出模型存在序列相关现象，需判断在模型的设定中是否是由于遗漏了重要的解释变量或对模型的函数形式设定有误而引起的虚假序列相关，这称为**模型的设定偏误检验**，已在第四章进行讨论。如果经检验不存在由于模型设定偏误而导致的虚假序列相关，即模型存在的序列相关是真实的序列相关或纯序列相关，则通过相应的修正方法进行修正。第二层次的问题是如何在设定模型时就避免产生虚假序列相关问题，或者说如何避免出现模型设定偏误问题，一个基本的建模规则就是在开始时建立一个“一般”的模型，然后逐渐剔除确实不显著的变量，这将在第七章中进一步阐述。

七、案例

例 5.1.1

为了从总体上考察中国居民收入与消费的关系，建立居民消费总量模型。表 5.1.1 给出了中国名义支出法国内生产总值 *GDP*、名义居民总消费 *CONS*、表示宏观税赋的税收总额 *TAX*、表示价格变化的居民消费价格指数 *CPI*（1990=100），并由这些数据整理出居民实际消费总支出 $Y=(CONS/CPI)\times 100$，以及实际可支配收入 $X=(GDP-TAX)/CPI\times 100$。这些数据是 1980—2013 年的**时间序列数据**，即观测值是连续不同年份中的数据。

表 5.1.1　中国居民消费总量支出与收入　　　　单位：亿元

年份	*GDP*	*CONS*	*CPI*	*TAX*	*X*	*Y*
1980	4 592.90	2 331.20	50.62	571.70	7 943.90	4 605.29
1981	5 008.80	2 627.90	51.90	629.89	8 437.21	5 063.39
1982	5 590.00	2 902.90	52.95	700.02	9 235.09	5 482.34
1983	6 216.20	3 231.10	54.00	775.59	10 075.20	5 983.52
1984	7 362.70	3 742.00	55.47	947.35	11 565.44	6 745.99
1985	9 076.70	4 687.40	60.65	2 040.79	11 600.84	7 728.61
1986	10 508.50	5 302.10	64.57	2 090.37	13 037.22	8 211.40
1987	12 277.40	6 126.10	69.30	2 140.36	14 627.76	8 839.97
1988	15 388.60	7 868.10	82.30	2 390.47	15 793.60	9 560.27
1989	17 311.30	8 812.60	97.00	2 727.40	15 034.95	9 085.15
1990	19 347.80	9 450.90	100.00	2 821.86	16 525.94	9 450.90
1991	22 577.40	10 730.60	103.42	2 990.17	18 939.50	10 375.75
1992	27 565.20	13 000.10	110.03	3 296.91	22 056.07	11 815.05
1993	36 938.10	16 412.10	126.20	4 255.30	25 897.62	13 004.83
1994	50 217.40	21 844.20	156.65	5 126.88	28 784.25	13 944.59
1995	63 216.90	28 369.70	183.41	6 038.04	31 175.43	15 467.91
1996	74 163.60	33 955.90	198.66	6 909.82	33 853.71	17 092.47
1997	81 658.50	36 921.50	204.21	8 234.04	35 955.37	18 080.16
1998	86 531.60	39 229.30	202.59	9 262.80	38 140.48	19 363.89
1999	91 125.00	41 920.40	199.72	10 682.58	40 277.60	20 989.59
2000	98 749.00	45 854.60	200.55	12 581.51	42 965.59	22 864.42
2001	109 029.00	49 435.90	201.94	15 301.38	46 413.60	24 480.49
2002	120 475.60	53 056.60	200.32	17 636.45	51 337.44	26 485.92
2003	136 613.40	57 649.80	202.73	20 017.31	57 512.99	28 436.74
2004	160 956.60	65 218.50	210.63	24 165.68	64 943.70	30 963.54
2005	187 423.40	72 958.70	214.42	28 778.54	73 987.90	34 026.07
2006	222 712.50	82 575.50	217.65	34 805.35	86 334.55	37 939.58
2007	266 599.20	96 332.50	228.10	45 621.97	96 877.35	42 232.57

续表

年份	*GDP*	*CONS*	*CPI*	*TAX*	*X*	*Y*
2008	315 974.60	111 670.40	241.54	45 223.79	112 093.57	46 232.67
2009	348 775.10	123 584.60	239.83	59 521.59	120 607.73	51 530.08
2010	402 816.50	140 758.60	247.74	73 210.79	133 045.01	56 817.07
2011	472 619.20	168 956.60	261.09	89 738.39	146 647.06	64 712.02
2012	529 399.20	190 584.60	276.20	100 614.30	155 244.35	69 002.39
2013	586 673.00	212 187.50	274.86	110 530.70	173 230.84	77 198.39

资料来源：根据《中国统计年鉴》（2001，2007，2014 年）整理。

1. 建立模型

根据宏观经济学中的消费理论，结合对中国居民总消费的实际分析，可以假定居民总消费(Y)是由居民实际可支配收入(X)唯一决定的，即 X 是 Y 的唯一解释变量。并且可以进一步假定收入的边际消费倾向不变，即模型是一个直接线性模型，因为从 X 和 Y 之间的关系图（图 5.1.2）中可以看出，X 和 Y 之间的关系表现为线性。

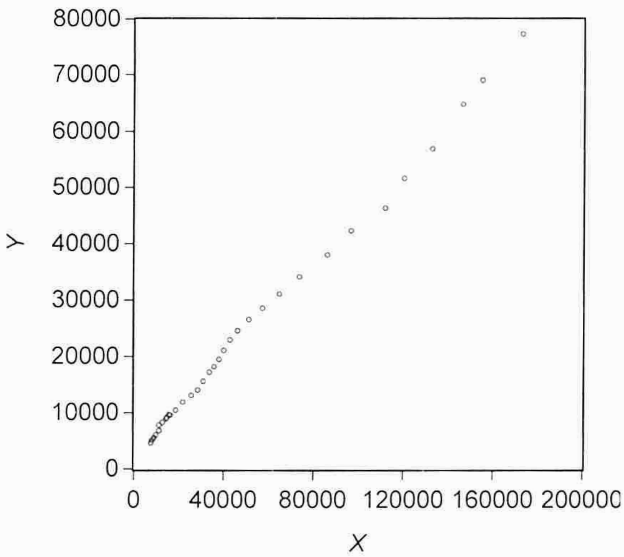


图 5.1.2　X 和 Y 关系图

采用 1980—2013 年的年度时间序列数据为样本和普通最小二乘估计方法，建立了如下中国居民总量消费模型：

$$\hat{Y}_t = 2\ 632.76 + 0.420\ 5X_t, \quad t = 1980,\cdots,2013 \tag{5.1.23}$$

$$(7.93) \qquad (88.89)$$

$$\bar{R}^2 = 0.995\ 8 \qquad F = 7\ 900.8 \qquad \text{D.W.} = 0.380\ 9$$

模型具有很好的拟合优度，总体显著性和变量显著性也很高。

2. 进行序列相关性检验

利用(5.1.23)式，计算模型随机项的估计值，即残差 e_t。从残差项 e_t 与 e_{t-1} 的关系

图（图 5.1.3，图中分别用 *resid* 和 *resid*(−1) 代表 e_t 和 e_{t-1} ）看，该模型随机项呈现明显的正序列相关性。

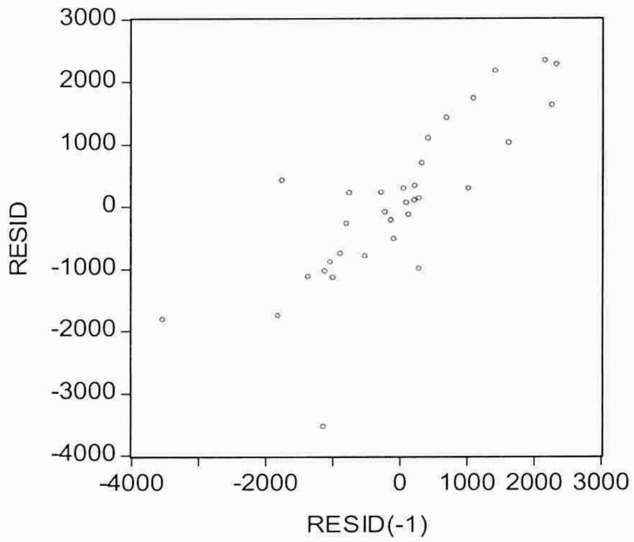


图 5.1.3 残差相关图

对模型(5.1.23)进行 D.W.检验，结果表明，在 5%在显著性水平下，n=34，k=2(包含常数项)，查表得 d_{L}=1.39，d_{U}=1.51，D.W.=0.380 9< d_{L}，故判断模型随机项存在正自相关。

再对(5.1.23)式进行序列相关性的拉格朗日乘数检验。含一阶滞后残差项的辅助回归为

$$e_t = -9.265 + 0.001\ 75X_t + 0.820e_{t-1}$$
$$(-0.045)\ (0.605)\quad (7.447)$$
$$\overline{R}^2 = 0.626\ 0$$

从变量显著性看，e_{t-1} 高度显著。计算得到，LM=33×0.626 0=20.658，该值大于显著性水平为 5%、自由度为 1 的 χ^2 分布的临界值 $\chi^2_{0.05}(1)$=3.84，由此判断原模型存在一阶序列相关性。

含二阶滞后残差项的辅助回归为

$$e_t = -2.076 + 0.001\ 4X_t + 0.952\ 6e_{t-1} - 0.168\ 1e_{t-2}$$
$$(-0.010)\ (0.453)\quad (5.057)\quad (-0.888)$$
$$\overline{R}^2 = 0.649\ 6$$

计算得到，LM=32×0.649 6=20.79，该值大于显著性水平为 5%、自由度为 2 的 χ^2 分布的临界值 $\chi^2_{0.05}(2)$=5.99，仍说明原模型存在序列相关性，但 e_{t-2} 的参数未通过 5%的显著性检验，表明并不存在二阶序列相关性。结合一阶滞后残差项的辅助回归情况，可

判断(5.1.23)式仅存在显著的一阶序列相关性。

3. 采用广义差分法估计模型

在 Eviews 软件包下，模型的一阶广义差分的估计结果为

$$\hat{Y}_t = 2\ 964.8 + 0.421\ 9X_t + 0.810\ 4AR[1] \tag{5.1.24}$$

$$(2.72) \quad (38.59) \quad (7.33)$$

$$\bar{R}^2 = 0.998\ 5,\ \text{D.W.}=1.692$$

式中，AR[1]前的参数值即为随机扰动项的一阶序列相关系数。在5%的显著性水平下，D.W.> d_U =1.58(样本容量为 33)，表明经广义差分变换后的模型已不存在序列相关性。

4. 采用序列相关稳健估计法

当模型存在序列相关性时，也可采用尼威-韦斯特（Newey-West）的序列相关一致方差估计，即进行序列相关稳健估计，以对普通最小二乘法参数估计量的方差进行修正。本例中，采用 Eviews 软件给出的序列相关稳健估计，结果为

$$\hat{Y}_t = 2\ 632.76 + 0.420\ 5X_t \tag{5.1.25}$$

$$(6.36) \quad (55.78)$$

$$\bar{R}^2 = 0.996\ 0 \quad F=7\ 900.8 \quad \text{D.W.}=0.381$$

可以看出，(5.1.25)式的参数估计与(5.1.23)式相同，但是由于参数估计量的标准差得到了修正，从而使得变量显著性的 t 统计量与普通最小二乘法的结果不同。这时所进行的变量显著性检验以及区间估计等都是有效的，序列相关性的后果得到了修正。

§5.2　时间序列的平稳性及其检验

本章开头已经说明，采用时间序列数据建立计量经济学模型，首先必须对用统计数据构造的时间序列进行平稳性检验。

一、问题的提出

对时间序列进行平稳性检验的理由主要有以下两个方面：

第一，时间序列的平稳性可以替代随机抽样假定，采用平稳时间序列作为样本，建立经典计量经济学模型，在模型设定正确的前提下，模型随机干扰项仍然满足极限法则和经典模型的基本假设（序列无关假设除外），特别是正态性假设。这是从经典计量经济学模型的方法论基础提出的。

第二，采用平稳时间序列建立经典计量经济学结构模型，可以有效地减少虚假回归。**虚假回归**(spurious regression)也称为**伪回归**，是由 2003 年诺贝尔经济学奖获得者格兰杰提出的。格兰杰通过模拟试验发现，完全无关的非平稳时间序列之间可以得到拟合很好

但毫无道理的回归结果。这一发现说明，非平稳时间序列由于具有共同的变化趋势，即使它们之间在经济行为上并不存在因果关系，如果将它们分别作为计量经济学模型的被解释变量和解释变量，也能够显示较强的统计上的因果关系。

这里需要特别纠正一种误解：只有非平稳时间序列之间才能出现虚假回归，平稳时间序列之间不会出现虚假回归。回归分析是一种统计分析，所揭示的是数据之间的统计关系。数据之间的统计关系是经济行为关系的必要条件，经济行为中客观存在的经济关系，一定能够通过表征经济行为的数据的统计分析而得到检验；如果不能通过必要性检验，在表征经济行为的数据是准确的和采用的统计分析方法是正确的前提下，只能怀疑所设定的经济关系的合理性和客观性。但是反过来，如果在统计分析中发现了新的数据之间的统计关系，并不能就此说发现了新的经济行为关系，因为统计关系不是经济关系的充分条件。古亚拉蒂在他的教科书 *Basic Econometrics* 中曾经强调：“从逻辑上说，一个统计关系式，不管多强或多么有启发性，本身不可能意味着任何因果关系。要谈因果关系，必须来自统计学之外，诉诸先验的或者理论上的思考。”所以，虚假回归，不仅可能出现在非平稳时间序列之间，也可能出现在平稳时间序列之间和截面数据序列之间。当然，非平稳时间序列之间出现虚假回归的可能性更大，因此，对时间序列进行平稳性检验，可以有效地减少虚假回归。在计量经济学模型研究中，杜绝虚假回归最根本的方法，是正确的设定模型。这是本书反复强调的。

二、时间序列数据的平稳性

假定某个时间序列是由某一**随机过程**(stochastic process)生成的，即假定时间序列$\{X_t\}(t=1,2,\cdots)$的每个数值都从一个概率分布中随机得到，如果X_t满足下列条件：

（1）均值$\mathrm{E}(X_t)=\mu$，与时间t无关的常数；

（2）方差$\mathrm{Var}(X_t)=\sigma^2$，与时间$t$无关的常数；

（3）协方差$\mathrm{Cov}(X_t X_{t+k})=\gamma_k$，只与时期间隔$k$有关，与时间$t$无关的常数。

则称该随机时间序列是（宽）**平稳的**，而该随机过程是一个**平稳随机过程**(stationary stochastic process)。

例 5.2.1

简单的随机时间序列$\{X_t\}$是一个具有零均值同方差的独立分布序列：

$$X_t=\mu_t, \qquad \mu_t \sim N(0,\sigma^2) \tag{5.2.1}$$

该序列常被称为是一个**白噪声**(white noise)。由于X_t具有相同的均值与方差，且协方差为零，因此由定义知一个白噪声序列是平稳的。

例 5.2.2

另一个简单的随机时间序列被称为**随机游走**(random walk)，该序列由如下随机过程生成：

$$X_t = X_{t-1} + \mu_t \tag{5.2.2}$$

这里，μ_t 是一个白噪声。

容易知道该序列有相同的均值 $\mathrm{E}(X_t) = \mathrm{E}(X_{t-1})$。为了检验该序列是否具有相同的方差，可假设 X_t 的初值为 X_0，则易知

$$X_1 = X_0 + \mu_1$$
$$X_2 = X_1 + \mu_2 = X_0 + \mu_1 + \mu_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_t = X_0 + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_t$$

假定初始值 X_0 为常数，μ_t 是一个白噪声，因此 $\mathrm{Var}(X_t) = t\sigma^2$，即 X_t 的方差与时间 t 有关而非常数，故它是非平稳序列。

然而，对 X_t 取**一阶差分**(first difference)

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \mu_t \tag{5.2.3}$$

由于 μ_t 是一个白噪声，则序列$\{\Delta X_t\}$是平稳的。后面将会看到，如果一个时间序列是非平稳的，它常常可通过取差分的方法形成平稳序列。

事实上，随机游走(5.2.2)式是下面称为**一阶自回归 AR(1)过程**的特例

$$X_t = \phi X_{t-1} + \mu_t \tag{5.2.4}$$

不难验证，$|\phi| > 1$ 时，该随机过程生成的时间序列是发散的，表现为持续上升($\phi>1$)或持续下降($\phi<-1$)，因此是非平稳的；$\phi=1$ 时，是一个随机游走过程，也是非平稳的。

三、平稳性的图示判断

给出一个随机时间序列，首先可通过该序列的时间路径图来粗略地判断它是否是平稳的。平稳时间序列(见图 5.2.1(a))在图形上往往表现出一种围绕其均值不断波动的过程；而非平稳时间序列(见图 5.2.1(b))则往往表现出在不同的时间段具有不同的均值(如持续上升或持续下降)。

然而，这种直观的图示也常产生误导，因此需要进行进一步的判别。通常的做法是检验样本自相关函数及其图形。首先定义随机时间序列的**自相关函数**(autocorrelation function, ACF)如下：

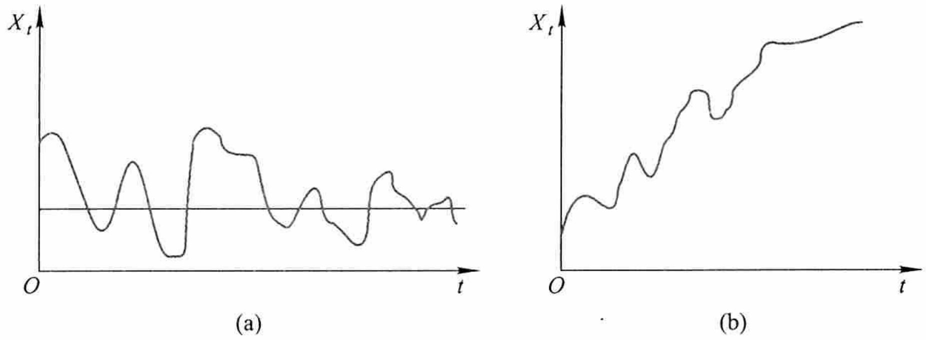


图 5.2.1 平稳时间序列与非平稳时间序列图

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \tag{5.2.5}$$

分子是时间序列滞后 k 期的协方差，分母是方差，因此自相关函数是关于滞后期 k 的递减函数。

由于实际上对一个随机过程只有一个实现(样本)，因此，只能计算**样本自相关函数**(sample autocorrelation function)，也称为样本自相关系数。一个时间序列的样本自相关函数定义为

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}\left(X_t - \bar{X}\right)\left(X_{t+k} - \bar{X}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(X_t - \bar{X}\right)^2}, \qquad k = 1,2,3,\cdots \tag{5.2.6}$$

易知，随着 k 的增加，样本自相关函数下降且趋于零。但从下降速度来看，平稳序列要比非平稳序列快得多。图 5.2.2 给出了图 5.2.1 中平稳时间序列(a)与非平稳时间序列(b)的样本自相关函数图。

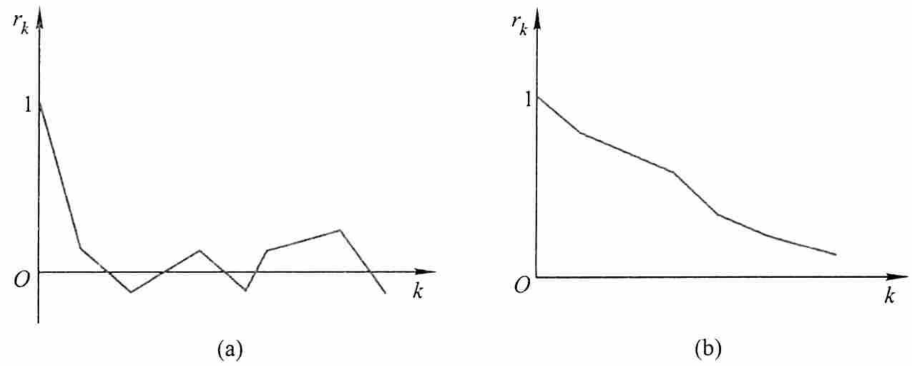


图 5.2.2 平稳时间序列与非平稳时间序列样本相关图

确定样本自相关函数某一数值 r_k 是否足够接近于 0 是非常有用的，因为它可检验对应的自相关函数 ρ_k 的真值是否为 0 的假设。巴特雷特(Bartlett)曾证明，如果时间序列由白噪声过程生成，则对所有的 $k>0$，样本自相关系数近似地服从均值为 0、方差为 $1/n$

的正态分布，其中 n 为样本数。

也可检验对所有的 $k>0$，自相关系数都为 0 的联合假设，这可通过如下 Q_{LB} 统计量进行：

$$Q_{LB}=n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{r_k^2}{n-k} \tag{5.2.7}$$

该统计量近似地服从自由度为 m 的 χ^2 分布(m 为滞后长度)。因此，如果计算的 Q 值大于显著性水平为 α 的临界值，则有 $1-\alpha$ 的把握拒绝所有 ρ_k ($k>0$)同时为 0 的假设。

例 5.2.3

表 5.2.1 中序列 Random1 是通过一个随机过程(随机函数)生成的有 19 个样本的随机时间序列。容易验证该样本序列的均值为 0，方差为 0.078 9。从图形上看(图 5.2.3)，它在其样本均值 0 附近上下波动，且样本自相关系数迅速下降到 0，随后在 0 附近波动且逐渐收敛于 0。由于该序列由一个随机过程生成，可以认为不存在序列相关性，因此该序列为一个白噪声。根据巴特雷特曾证明的，该序列的自相关系数应遵从均值为 0、方差为 1/19 的正态分布，因此任一 ρ_k ($k>0$)的显著性水平为 95%的置信区间都将是[−0.449 7, 0.449 7]。可以看出 $k>0$ 时，r_k 的值确实落在了该区间内，因此可以接受 ρ_k ($k>0$)为 0 的假设。同样地，从 Q_{LB} 统计量的计算值看，滞后 17 期的计算值为 26.38，未超过 5%显著性水平的临界值 27.58，因此可以接受所有的自相关系数 ρ_k ($k>0$)都为 0 的假设。因此，该随机过程是一个平稳过程。

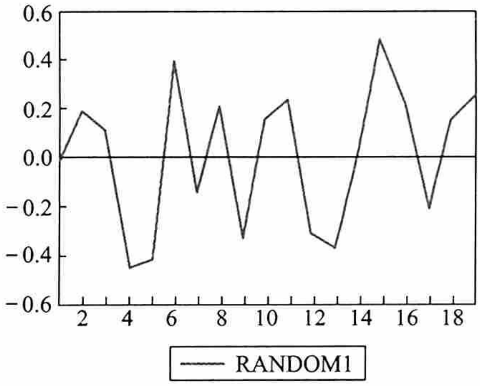
序列 Random2 是由(5.2.2)式生成的一个随机游走时间序列样本(图 5.2.4)，其中第 0 项取值为 0，随机项是由 Random1 表示的白噪声。图形表示出该序列具有相同的均值，但从样本自相关图看，虽然自相关系数迅速下降到 0，但随着时间的推移，则在 0 附近波动且呈发散趋势。样本自相关系数显示 $r_1=0.48$，落在了区间[−0.449 7, 0.449 7]之外，因此在 5%的显著性水平下拒绝 ρ_1 的真值为 0 的假设。该随机游走序列是非平稳的。

表 5.2.1 一个纯随机序列与随机游走序列的检验

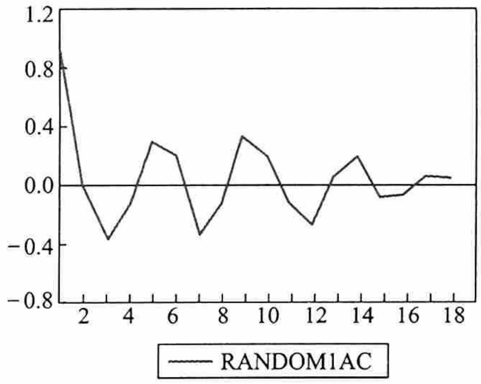
序号	Random1	自相关系数 r_k (k=0,1,⋯,17)	Q_{LB}	Random2	自相关系数 r_k (k=0,1,⋯,17)	Q_{LB}
1	−0.031	1.000		−0.031	1.000	
2	0.188	−0.051	0.059	0.157	0.480	5.116
3	0.108	−0.393	3.679	0.264	0.018	5.123
4	−0.455	−0.147	4.216	−0.191	−0.069	5.241
5	−0.426	0.280	6.300	−0.616	0.028	5.261
6	0.387	0.187	7.297	−0.229	−0.016	5.269
7	−0.156	−0.363	11.332	−0.385	−0.219	6.745
8	0.204	−0.148	12.058	−0.181	−0.063	6.876

续表

序号	Random1	自相关系数 r_k (k=0,1,…,17)	Q_{LB}	Random2	自相关系数 r_k (k=0,1,…,17)	Q_{LB}
9	−0.340	0.315	15.646	−0.521	0.126	7.454
10	0.157	0.194	17.153	−0.364	0.024	7.477
11	0.228	−0.139	18.010	−0.136	−0.249	10.229
12	−0.315	−0.297	22.414	−0.451	−0.404	18.389
13	−0.377	0.034	22.481	−0.828	−0.284	22.994
14	−0.056	0.165	24.288	−0.884	−0.088	23.514
15	0.478	−0.105	25.162	−0.406	−0.066	23.866
16	0.244	−0.094	26.036	−0.162	0.037	24.004
17	−0.215	0.039	26.240	−0.377	0.105	25.483
18	0.141	0.027	26.381	−0.236	0.093	27.198
19	0.236			0.000		

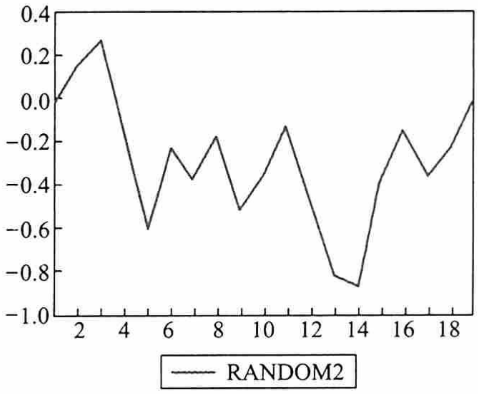


(a)

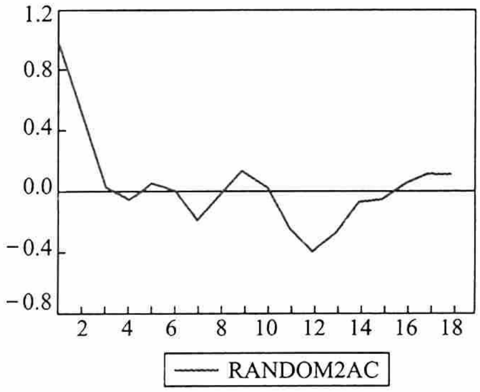


(b)

图 5.2.3 纯随机序列 Random1 样本图及其样本自相关系数图



(a)



(b)

图 5.2.4 随机游走序列 Random2 样本图及其样本自相关系数图

四、平稳性的单位根检验

对时间序列的平稳性除了通过图形直观判断外，运用统计量进行统计检验则是更为准确与重要的。**单位根检验**(unit root test)是统计检验中普遍应用的一种检验方法。

1．DF 检验

我们已知道，随机游走序列

$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

是非平稳的，其中 μ_t 是白噪声。而该序列可看成是随机模型

$$X_t = \rho X_{t-1} + \mu_t \tag{5.2.8}$$

中参数 ρ=1 时的情形。也就是说，对(5.2.8)式作回归，如果确实发现 ρ=1，则称随机变量 X_t 有一个**单位根**。显然，一个有单位根的时间序列就是随机游走序列，而随机游走序列是非平稳的。因此，要判断某时间序列是否是平稳的，可通过(5.2.8)式判断它是否有单位根。这就是时间序列平稳性的单位根检验。

(5.2.8)式可变形成差分形式

$$\begin{aligned}\Delta X_t &= (\rho - 1)X_{t-1} + \mu_t \\ &= \delta X_{t-1} + \mu_t\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

检验(5.2.8)式是否存在单位根 ρ=1，也可通过(5.2.9)式判断是否有 δ=0。

一般地，检验一个时间序列 X_t 的平稳性，可通过检验带有截距项的一阶自回归模型

$$X_t = \alpha + \rho X_{t-1} + \mu_t \tag{5.2.10}$$

中的参数 ρ 是否小于 1，或者说检验其等价变形式

$$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \mu_t \tag{5.2.11}$$

中的参数 δ 是否小于 0。

在§5.4 中我们将证明，(5.2.10)式中的参数 ρ 大于或等于 1 时，时间序列 X_t 是非平稳的，对应于(5.2.11)式，则是 δ 大于或等于 0。因此，针对(5.2.11)式，是在备择假设 H_1：δ<0 下检验零假设 H_0：δ=0。这可通过普通最小二乘法下的 t 检验完成。

然而，在零假设(序列非平稳)下，即使在大样本下统计量也是有偏误的(向下偏倚)，通常的 t 检验无法使用。迪基(Dickey)和福勒(Fuller)于 1976 年提出了这一情形下 t 统计量服从的分布(这时的 t 统计量也称为 τ 统计量)，即 DF 分布(见表 5.2.2)。因此，检验仍采用普通最小二乘法估计(5.2.11)式，计算 t 统计量的值，并与 DF 分布表中给定显著性水平下的临界值比较。如果 t 统计量的值小于临界值(左尾单侧检验)，这意味着 δ 足够小，则拒绝零假设 H_0：δ=0，认为时间序列不存在单位根，是平稳的。

表 5.2.2 DF 分布临界值表

显著性水平	样本容量					t 分布临界值 ($n=+\infty$)
	25	50	100	500	∞	
0.01	–3.75	–3.58	–3.51	–3.44	–3.43	–2.33
0.05	3.00	–2.93	–2.89	–2.87	–2.86	–1.65
0.10	2.63	–2.60	–2.58	–2.57	–2.57	–1.28

2. ADF 检验

在上述使用(5.2.11)式对时间序列进行平稳性检验中，实际上假定了时间序列是由具有白噪声随机干扰项的一阶自回归过程 AR(1)生成的。但在实际检验中，时间序列可能由更高阶的自回归过程生成，或者随机干扰项并非是白噪声，这样用普通最小二乘法进行估计得到的 t 统计量的渐近分布会受到无关参数的干扰，导致 DF 检验无效。另外，如果时间序列包含有明显的随时间变化的某种趋势(如上升或下降)，则 DF 检验必须保证能够除去这些趋势，否则时间趋势成分会进入随机干扰项。这两种情况都偏离了随机干扰项为白噪声的情形，统计量的渐近分布随之改变。

为了保证 DF 检验中随机干扰项的白噪声特性，迪基和福勒对 DF 检验进行了扩充，形成了 **ADF 检验**(augment Dickey-Fuller test)。ADF 检验是通过下面三个模型完成的：

模型 1：
$$\Delta X_t=\delta X_{t-1}+\sum_{i=1}^{m}\beta_i\Delta X_{t-i}+\varepsilon_t \tag{5.2.12}$$

模型 2：
$$\Delta X_t=\alpha+\delta X_{t-1}+\sum_{i=1}^{m}\beta_i\Delta X_{t-i}+\varepsilon_t \tag{5.2.13}$$

模型 3：
$$\Delta X_t=\alpha+\beta T+\delta X_{t-1}+\sum_{i=1}^{m}\beta_i\Delta X_{t-i}+\varepsilon_t \tag{5.2.14}$$

模型 3 中的 T 是时间变量，代表了时间序列随时间变化的某种趋势(如果有的话)。零假设都是 H_0：$\delta=0$，即存在一个单位根。模型 1 与另两个模型的差别在于是否包含常数项和趋势项。

模型 1、2、3 中都增加了 ΔX_t 的滞后项，是为了消除时间序列由更高阶的自回归过程生成时模型(5.2.11)随机干扰项的序列相关，保证随机项是白噪声。在进行实际检验时，一般采用§5.1 介绍的拉格朗日乘数检验（LM 检验）确定滞后阶数 m，或者其他数据依赖方法。当采用一些应用软件（例如 Eviews）进行 ADF 检验时，可以自动得到滞后阶数，使得估计过程更加简单。但是，在软件中一般采用信息准则（例如 AIC、BIC 等）确定滞后阶数，其明显的缺点是无法判断滞后阶数不连续的情况，例如只存在一阶和三阶而不存在二阶相关的情况。另外，从理论上讲，信息准则主要是基于预测的均方误差最小，但对于单位根检验而言重要的是消除序列相关性。

实际检验时从模型 3 开始，然后模型 2，最后是模型 1。何时检验拒绝零假设，即原序列不存在单位根，为平稳序列，何时可停止检验。否则，就要继续检验，直到检验完

模型 1 为止。检验原理与 DF 检验相同，只是对模型 1，2，3 进行检验时，有各自相应的临界值表。表 5.2.3 给出了三个模型所使用的 ADF 分布临界值表。

ADF 检验的具体过程以及其中的若干问题，将在本节的案例中详细介绍。

表 5.2.3 不同模型使用的 ADF 分布临界值表

模型	统计量	样本容量	**0.01**	**0.025**	**0.05**	**0.10**
1	τ_δ	25	–2.66	–2.26	–1.95	–1.60
		50	–2.62	–2.25	–1.95	–1.61
		100	–2.60	–2.24	–1.95	–1.61
		250	–2.58	–2.23	–1.95	–1.61
		500	–2.58	–2.23	–1.95	–1.61
		>500	–2.58	–2.23	–1.95	–1.61
2	τ_δ	25	–3.75	–3.33	–3.00	–2.62
		50	–3.58	–3.22	–2.93	–2.60
		100	–3.51	–3.17	–2.89	–2.58
		250	–3.46	–3.14	–2.88	–2.57
		500	–3.44	–3.13	–2.87	–2.57
		>500	–3.43	–3.12	–2.86	–2.57
	τ_α	25	3.41	2.97	2.61	2.20
		50	3.28	2.89	2.56	2.18
		100	3.22	2.86	2.54	2.17
		250	3.19	2.84	2.53	2.16
		500	3.18	2.83	2.52	2.16
		>500	3.18	2.83	2.52	2.16
3	τ_δ	25	–4.38	–3.95	–3.60	–3.24
		50	–4.15	–3.80	–3.50	–3.18
		100	–4.04	–3.73	–3.45	–3.15
		250	–3.99	–3.69	–3.43	–3.13
		500	–3.98	–3.68	–3.42	–3.13
		>500	–3.96	–3.66	–3.41	–3.12
	τ_α	25	4.05	3.59	3.20	2.77
		50	3.87	3.47	3.14	2.75
		100	3.78	3.42	3.11	2.73
		250	3.74	3.39	3.09	2.73
		500	3.72	3.38	3.08	2.72
		>500	3.71	3.38	3.08	2.72
	τ_β	25	3.74	3.25	2.85	2.39
		50	3.60	3.18	2.81	2.38
		100	3.53	3.14	2.79	2.38
		250	3.49	3.12	2.79	2.38
		500	3.48	3.11	2.78	2.38
		>500	3.46	3.11	2.78	2.38

从模型 3 转到模型 2 时，需要检验β=0 是否成立，不幸的是这里β的 t 统计量仍然不服从正态分布；从模型 2 转到模型 1 时，需要检验α=0 是否成立，这里α的 t 统计量也不服从正态分布。不过无论是哪种模型，无论真实的数据是一个单位根过程还是一个平稳过程，滞后项的 t 统计量都是服从正态分布的。

一个简单的检验是同时估计出上述三个模型的适当形式，然后通过 ADF 临界值表检验零假设 H_0：δ=0。只要其中有一个模型的检验结果拒绝了零假设，就可以认为时间序列是平稳的。当三个模型的检验结果都不能拒绝零假设时，则认为时间序列是非平稳的。这里所谓模型适当的形式就是在每个模型中选取适当的滞后差分项，以使模型的残差项是一个白噪声(主要保证不存在自相关)。

五、单整时间序列

随机游走序列

$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

经差分后等价地变形为

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \mu_t \tag{5.2.15}$$

由于 μ_t 是一个白噪声，因此差分后的序列$\{\Delta X_t\}$是平稳的。

如果一个时间序列经过一次差分变成平稳的，就称原序列是一阶单整(integrated of 1)序列，记为 $I(1)$。一般地，如果一个时间序列经过 d 次差分后变成平稳序列，则称原序列是 ***d*** 阶单整(integrated of *d*)序列，记为 $I(d)$。显然，$I(0)$代表平稳时间序列。

现实生活中，只有少数经济指标的时间序列表现为平稳，如利率，而大多数指标的时间序列是非平稳的，如一些宏观经济总量序列常常是二阶单整的。在下面的案例中，将分别对平稳序列、一阶单整序列和二阶单整序列进行检验。大多数非平稳的时间序列一般可通过一次或多次差分变为平稳的。但也有一些时间序列，无论经过多少次差分，都不能变为平稳的。这种序列称为非单整的(nonintegrated)。

六、案例

例 5.2.4

表 5.1.1 中列出了 1980—2013 年中国名义居民消费总量（CONS）数据，消除价格因素后，得到以 1990 年价格计算的实际居民消费总量（Y_t）的时间序列数据。

1. 对 Y_t 水平序列的检验

对 Y_t 水平序列进行单位根检验，目的是检验 Y_t 本身是否是平稳序列。首先采用拉格朗日乘数检验确定滞后阶数为 1，即只需在检验模型中引入 1 阶滞后项即可以消除

序列相关。于是，ADF 检验模型为

模型 3：$\Delta Y_t = \alpha + \beta T + \delta Y_{t-1} + \beta_1 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$

模型 2：$\Delta Y_t = \alpha + \delta Y_{t-1} + \beta_1 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$

模型 1：$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \beta_1 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$

首先估计模型 3，得到：

$$\Delta \hat{Y}_t = -231.98 - 34.382\,5T + 0.169\,8Y_{t-1} - 0.448\,3\Delta Y_{t-1}$$

$$(-0.777)\ (-0.972) \qquad (6.050) \qquad (-2.249)$$

首先，从 Y_{t-1} 的参数值看，其 t_δ 统计量的值(6.050)大于 5%显著性水平下的临界值（-3.558），因此，不能拒绝存在单位根的零假设。**这里需要说明：ADF 检验的 t_δ 检验为单尾检验，只需将 t_δ 统计量的值与临界值进行直接比较。如果 t_δ 统计量的值大于临界值，则不能拒绝存在单位根的零假设；反之，则拒绝存在单位根的零假设。这不同于一般模型变量显著性 t 检验的双尾检验。另外，在采用软件进行 ADF 检验时，会自动给出 1%、5%和 10%显著性水平下的 t_δ 统计量的临界值，不需要查 ADF 分布表。**同时，由于时间趋势项 T 的 t_T 统计量的值(-0.972)，小于 5%显著性水平下的临界值（2.85），该临界值通过查 ADF 分布表得到，因此，不能拒绝不存在时间趋势项的零假设。t_T 检验即为一般的变量显著性检验，不同的是临界值不能查自 t 分布表。综合以上两项检验结果，需进一步估计和检验模型 2。

在这里，读者自然会提出一个问题：如果发生矛盾现象，怎么办？如果检验显示既不拒绝零假设 H_0：$\delta=0$，也不拒绝零假设 H_0：$\beta=0$，就要检验模型 2。如果检验显示不拒绝零假设：δ=0，但是拒绝零假设 H_0：$\beta=0$，即模型中的时间趋势项是显著的，那么回到模型 2 就是不合理的。这就出现了矛盾。一种经验的处理方法是，采用正态分布临界值检验是否存在单位根，即将临界值适当放松，如果仍然存在单位根，即停止检验，得到该时间序列非平稳的结论。

接着估计模型 2，得到：

$$\Delta \hat{Y}_t = -439.90 + 0.150\,8Y_{t-1} - 0.422\,2\Delta Y_{t-1}$$

$$(-2.113)\ (7.487) \qquad (-2.139)$$

首先，从 Y_{t-1} 的参数值看，其 t_δ 统计量的值(7.487)大于 5%显著性水平下的临界值（-2.957），该临界值由软件给出，因此，不能拒绝存在单位根的零假设。同时，由于截距项的 t_α 统计量的值(-2.113)，小于 5%显著性水平下的临界值（2.61），该临界值通过查 ADF 分布表得到，因此，不能拒绝不存在截距项的零假设。综合以上两项检验结果，需进一步估计和检验模型 1。

最后估计模型 1，得到：

$$\Delta\hat{Y}_t = 0.130\ 4Y_{t-1} - 0.326\ 7\Delta Y_{t-1}$$
$$(0.986) \qquad (-1.610)$$

从模型估计结果看到：Y_{t-1} 参数值的 t_δ 统计量的值(0.986)大于 5%显著性水平下的临界值（-1.952），该临界值由软件给出，因此，不能拒绝存在单位根的零假设。

三个模型中 Y_{t-1} 参数估计值的 t_δ 统计量的值均大于各自的临界值，因此不能拒绝存在单位根的零假设，即**中国实际居民消费总量序列 Y_t 是非平稳的**。如果仅仅为了检验 Y_t 的平稳性，检验工作到此结束。如果还希望进一步确定：Y_t 是否是单整序列？是多少阶的单整序列？需要继续进行检验。

2. 对 Y_t 的 1 次差分序列的检验

对 Y_t 的 1 次差分序列进行单位根检验，目的是检验 Y_t 经过 1 次差分后构成的序列是否是平稳序列。首先采用拉格朗日乘数检验确定滞后阶数为 1，即只需在检验模型中引入 1 阶滞后项即可以消除序列相关。于是，ADF 检验模型为

模型 3：$\Delta^2 Y_t = \alpha + \beta T + \delta\Delta Y_{t-1} + \beta_1\Delta^2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

模型 2：$\Delta^2 Y_t = \alpha + \delta\Delta Y_{t-1} + \beta_1\Delta^2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

模型 1：$\Delta^2 Y_t = \delta\Delta Y_{t-1} + \beta_1\Delta^2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

其中，$\Delta^2 Y_t$ 表示对 Y_t 进行两次差分。

估计模型 3，得到：

$$\Delta^2\hat{Y}_t = -363.10 + 58.084\ 1T - 0.158\ 1\Delta Y_{t-1} - 0.852\ 7\Delta^2 Y_{t-1}$$
$$(-1.031)\ (1.826) \qquad (-0.974) \qquad (-5.189)$$

首先，从 ΔY_{t-1} 的参数值看，其 t_δ 统计量的值(-0.974)大于 5%显著性水平下的临界值（-3.563），因此，不能拒绝存在单位根的零假设。同时，由于时间趋势项 T 的 t_T 统计量的值(1.826)小于 5%显著性水平下的临界值（2.85），因此，不能拒绝不存在时间趋势项的零假设。综合两项检验结果，需进一步估计和检验模型 2。

估计模型 2，得到：

$$\Delta^2\hat{Y}_t = 159.14 + 0.102\ 7\Delta Y_{t-1} - 0.972\ 1\Delta^2 Y_{t-1}$$
$$(0.744)\ (1.279) \qquad (-6.196)$$

首先，从 ΔY_{t-1} 的参数值看，其 t_δ 统计量的值(1.279)大于 5%显著性水平下的临界值（-2.960），因此，不能拒绝存在单位根的零假设。同时，由于截距项的 t_α 统计量的值(0.744)小于 5%显著性水平下的临界值（2.61），因此，不能拒绝不存在截距项的零假设。综合两项检验结果，需进一步估计和检验模型 1。

估计模型 1，得到：

$$\Delta^2\hat{Y}_t = 0.147\ 4\Delta Y_{t-1} - 0.987\ 1\Delta^2 Y_{t-1}$$
$$(2.791) \qquad (-6.394)$$

ΔY_{t-1}参数值的t_δ统计量的值(2.791)大于 5%显著性水平下的临界值（−1.952），因此，不能拒绝存在单位根的零假设。

三个模型中ΔY_{t-1}参数估计值的t_δ统计量的值均大于各自的临界值，因此不能拒绝存在单位根的零假设，即**中国实际居民消费总量的 1 阶差分序列ΔY_t是非平稳的。**

3. 对Y_t的 2 次差分序列的检验

对Y_t的 2 次差分序列进行单位根检验，目的是检验Y_t经过 2 次差分后构成的序列是否是平稳序列。采用软件中提供的自动确定滞后阶数功能，确定滞后阶数为 2。当然，也可以采用拉格朗日乘数检验确定滞后阶数。于是，ADF 检验模型为

模型 3：$\Delta^3 Y_t = \alpha + \beta T + \delta\Delta^2 Y_{t-1} + \beta_1\Delta^3 Y_{t-1} + \beta_2\Delta^3 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

模型 2：$\Delta^3 Y_t = \alpha + \delta\Delta^2 Y_{t-1} + \beta_1\Delta^3 Y_{t-1} + \beta_2\Delta^3 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

模型 1：$\Delta^3 Y_t = \delta\Delta^2 Y_{t-1} + \beta_1\Delta^3 Y_{t-1} + \beta_2\Delta^3 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

其中，$\Delta^3 Y_t$表示对Y_t进行 3 次差分。

估计模型 3，得到：

$$\Delta^3\hat{Y}_t = -510.87 + 58.203\,4T - 3.068\,3\Delta^2 Y_{t-1} + 1.072\,6\Delta^3 Y_{t-1} + 0.743\,2\Delta^3 Y_{t-2}$$

（−1.450） (2.874) (−5.263) （2.225） （2.471）

从$\Delta^2 Y_{t-1}$的参数值看，其t_δ统计量的值(−5.263)小于 5%显著性水平下的临界值（−3.574），甚至也小于 1%显著性水平下的临界值（−4.310），因此，拒绝存在单位根的零假设。于是得到结论：**中国实际居民消费总量的 2 阶差分序列$\Delta^2 Y_t$是平稳的。**进一步可以说，**中国实际居民消费总量序列是一个 2 阶单整序列，**即$Y_t \sim I(2)$。

4. 对Y_t增长率序列的检验

利用实际居民消费总量（Y_t）时间序列数据，可以计算居民消费总量的年增长率时间序列$(\frac{Y_t}{Y_t - 1} - 1)$，用$GY_t$表示。对$GY_t$进行 ADF 单位根检验，以检验其平稳性。首先对$GY_t$的水平序列进行检验，自动选择经验模型滞后项，确定滞后阶数为 0，得到模型 3 的估计结果：

$$\Delta\widehat{GY}_t = 0.056\,8 + 0.000\,7T - 0.762\,7GY_{t-1}$$

（2.927） (0.979) (−4.233)

从GY_{t-1}的参数值看，其t_δ统计量的值(−4.233)小于 5%显著性水平下的临界值（−3.558），因此，拒绝存在单位根的零假设。于是得到结论：**中国实际居民消费总量增长率序列是平稳的。**

5. 对Y_t的对数序列的检验

对实际居民消费总量（Y_t）时间序列数据取对数，构成新的时间序列$\ln Y_t$。对$\ln Y_t$进行 ADF 单位根检验，以检验其平稳性。

首先对$\ln Y_t$的水平序列进行检验，三个模型中$\Delta\ln Y_{t-1}$参数估计值的t_δ统计量的值

均大于各自的临界值，因此不能拒绝存在单位根的零假设，即**中国实际居民消费总量的对数序列 $\ln Y_t$ 是非平稳的**。

再对 $\ln Y_t$ 的 1 阶差分序列进行检验，自动选择经验模型滞后项，确定滞后阶数为 0，得到模型 3 的估计结果：

$$\Delta^2 \ln \hat{Y}_t = 0.054\,2 + 0.000\,6T - 0.765\,2\Delta \ln Y_{t-1}$$

$$(2.944) \quad (0.990) \quad (-4.248)$$

从 $\Delta \ln Y_{t-1}$ 的参数值看，其 t_δ 统计量的值(−4.248)小于 5%显著性水平下的临界值(−3.558)，因此，拒绝存在单位根的零假设。于是得到结论：**中国实际居民消费总量的对数序列 $\ln Y_t$ 是 1 阶单整序列，即 $\ln Y_t \sim I(1)$**。

从这里发现，**2 阶单整序列取对数后构成的序列为 1 阶单整序列。在实际的宏观经济分析中，由于许多宏观经济时间序列都是 2 阶单整序列，人们经常首先将它们取对数，然后分析对数序列之间的关系，就是为了利用 1 阶单整序列良好的统计性质。**

类似地，可以采用表 5.1.1 中列出的 1980—2013 年中国居民实际可支配收入(X_t)时间序列数据，进行单位根检验。检验结果是：**中国居民实际可支配收入序列为 2 阶单整序列，即 $X_t \sim I(2)$；中国居民实际可支配收入的对数序列是 1 阶单整序列，即 $\ln X_t \sim I(1)$；中国居民实际可支配收入增长率序列是平稳的**。具体检验过程作为练习题，由读者自己完成。

*七、趋势平稳与差分平稳随机过程

前面已指出，一些非平稳的经济时间序列往往表现出共同的变化趋势，而这些序列间本身不一定有直接的因果关系，这时对这些数据进行回归，尽管有较高的 R^2，但其结果是没有任何实际意义的。这种现象我们称为虚假回归。例如用中国的劳动力时间序列与美国的 GDP 时间序列作回归，会得到较高的 R^2，但不能认为两者有直接的因果关系，而只不过它们有共同的趋势罢了，这种回归结果被认为是虚假的。

为了避免这种虚假回归的产生，通常的做法是引入作为趋势变量的时间，这样包含有时间趋势变量的回归，可以消除这种趋势性的影响。然而这种做法，只有当趋势性变量是确定性的而非随机性的时，才会有效。换言之，一个包含有某种确定性趋势的非平稳时间序列，可以通过引入表示这一确定性趋势的变量，而将确定性趋势分离出来。

考虑如下的含有一阶自回归的随机过程：

$$X_t = \alpha + \beta t + \rho X_{t-1} + \mu_t \tag{5.2.16}$$

其中，μ_t 是一个白噪声，t 为一个时间趋势。

如果$\rho=1$，$\beta=0$，则(5.2.16)式成为一个带位移的随机游走过程：

$$X_t=\alpha+X_{t-1}+\mu_t \tag{5.2.17}$$

根据α的正负，X_t表现出明显的上升或下降趋势。这种趋势称为随机性趋势(stochastic trend)。

如果$\rho=0$，$\beta\neq 0$，则(5.2.16)式成为一个带时间趋势的随机变化过程：

$$X_t=\alpha+\beta t+\mu_t \tag{5.2.18}$$

根据β的正负，X_t表现出明显的上升或下降趋势。这种趋势称为确定性趋势(deterministic trend)。

如果$\rho=1$，$\beta\neq 0$，则X_t包含确定性与随机性两种趋势。

判断一个非平稳的时间序列的趋势是随机性的还是确定性的，可通过 ADF 检验中所用的第 3 个模型进行。该模型中已引入了表示确定性趋势的时间变量t，即分离出了确定性趋势的影响。因此，如果检验结果表明所给时间序列有单位根，且时间变量前的参数显著为零，则该序列显示出随机性趋势；如果没有单位根，且时间变量前的参数显著地异于零，则该序列显示出确定性趋势。

随机性趋势可通过差分的方法消除，如(5.2.17)式可通过差分变换为

$$\Delta X_t=\alpha+\mu_t$$

该时间序列X_t称为差分平稳过程(difference stationary process)；而确定性趋势无法通过差分的方法消除，只能通过除去趋势项消除，如（5.2.18）式可通过除去βt变换为

$$X_t-\beta t=\alpha+\mu_t$$

其中，μ_t是平稳的，因此X_t称为趋势平稳过程(trend stationary process)。

最后需要说明的是，趋势平稳过程代表了一个时间序列长期稳定的变化过程，因而用于进行长期预测是更为可靠的。

§5.3 协整与误差修正模型

对于时间序列数据，如果通过平稳性检验为非平稳序列，能否建立经典计量经济学模型？例如，在§5.2 中，对于中国居民消费总量和居民可支配收入序列，采用 ADF 检验，已经表明它们都是 2 阶单整序列，那么，在§5.1 的案例中所建立的以居民可支配收入为解释变量的中国居民消费总量模型是否是正确的？本节将讨论这个问题。

一、长期均衡关系与协整

经济理论指出，某些经济变量间确实存在着长期均衡关系。这种均衡关系意味着经济系统不存在破坏均衡的内在机制。如果变量在某时期受到干扰后偏离其长期均衡点，则均衡机制将会在下一期进行调整以使其重新回到均衡状态。

假设X与Y间的长期“均衡关系”由下式描述

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \mu_t \tag{5.3.1}$$

式中，μ_t 是随机干扰项。该均衡关系意味着给定 X 的一个值，Y 相应的均衡值也随之确定为 $\alpha_0 + \alpha_1 X$ 。在 $t-1$ 期末，存在下述三种情形之一：

(1) Y 等于它的均衡值

$$Y_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} \tag{5.3.2}$$

(2) Y 小于它的均衡值

$$Y_{t-1} < \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}$$

(3) Y 大于它的均衡值

$$Y_{t-1} > \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}$$

在时期 t，假设 X 有一个变化量 ΔX_t，如果变量 X 与 Y 在时期 t 与 $t-1$ 期末仍满足它们间的长期均衡关系，则 Y 的相应变化量 ΔY_t 由下式给出：

$$\Delta Y_t = \alpha_1 \Delta X_t + v_t \tag{5.3.3}$$

式中，$v_t = \mu_t - \mu_{t-1}$。然而情况往往并非如此。如果 $t-1$ 期末，发生了上述第二种情况，即 Y 的值小于其均衡值，则 Y 的变化往往会比第一种情形下 Y 的变化 ΔY_t 大一些；反之，如果 Y 的值大于其均衡值，则 Y 的变化往往会小于第一种情形下的 ΔY_t 。

可见，如果(5.3.1)式正确地提示了 X 与 Y 间的长期稳定的“均衡关系”，则意味着 Y 对其均衡点的偏离从本质上说是“临时性”的。因此，一个重要的假设就是随机干扰项 μ_t 必须是平稳序列。显然，如果 μ_t 有随机性趋势(上升或下降)，则会导致 Y 对其均衡点的任何偏离都会被长期累积下来而不能被消除。

(5.3.1)式中的随机干扰项 μ_t 也称为非均衡误差(disequilibrium error)，它是变量 X 与 Y 的一个线性组合：

$$\mu_t = Y_t - \alpha_0 - \alpha_1 X_t \tag{5.3.4}$$

因此，如果(5.3.1)式所揭示的 X 与 Y 间的长期均衡关系正确，(5.3.4)式表述的非均衡误差应是一个平稳时间序列，并且具有零均值，即 μ_t 是具有零均值的 $I(0)$ 序列。

正像前面所指出的，许多经济变量是非平稳的，即它们是 1 阶或更高阶的单整时间序列。但从这里我们已看到，非平稳的时间序列，它们的线性组合也可能成为平稳的。如假设(5.3.1)式中的 X 与 Y 是 $I(1)$ 序列，如果该式所表述的它们间的长期均衡关系成立，则意味着由非均衡误差(5.3.4)式给出的线性组合是 $I(0)$ 序列。这时我们称变量 X 与 Y 是协整的。

一般地，如果序列 $X_{1t}, X_{2t}, \cdots, X_{kt}$ 都是 d 阶单整的，存在向量 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$，使得 $\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{X}_t' \sim I(d-b)$，其中，$b>0, \boldsymbol{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \cdots, X_{kt})'$，则认为序列 $X_{1t}, X_{2t}, \cdots, X_{kt}$ 是 (d,b) 阶协整，记为 $\boldsymbol{X}_t \sim \mathrm{CI}(d,b)$，$\boldsymbol{\alpha}$ 为协整向量(cointegrated vector)。

由此可见，如果两个变量都是单整变量，只有当它们的单整阶相同时，才可能协整；

如果它们的单整阶不相同，就不可能协整。

三个以上的变量，如果具有不同的单整阶数，有可能经过线性组合构成低阶单整变量。例如，如果存在

$$W_t \sim I(1), \qquad V_t \sim I(2), \qquad U_t \sim I(2)$$

并且

$$P_t = aV_t + bU_t \sim I(1)$$
$$Q_t = cW_t + eP_t \sim I(0)$$

那么认为

$$V_t, U_t \sim \mathrm{CI}(2,1)$$
$$W_t, P_t \sim \mathrm{CI}(1,1)$$

从协整的定义可以看出，(d,d)阶协整是一类非常重要的协整关系，它的经济意义在于：两个变量，虽然它们具有各自的长期波动规律，但是如果它们是(d,d)阶协整的，则它们之间存在着一个长期稳定的比例关系。例如，前面提到的中国居民消费总量 Y 和总可支配收入 X，它们各自都是 2 阶单整序列，它们取对数后的序列 $\ln Y$ 与 $\ln X$ 各自都是 1 阶单整序列，如果 $\ln Y$ 与 $\ln X$ 是(1,1)阶协整的，说明它们的对数序列间存在一个长期稳定的比例关系。从计量经济学模型的意义上讲，建立如下居民总量消费函数模型：

$$\ln Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln X_t + \mu_t$$

变量的选择是合理的，随机干扰项也一定是一个白噪声，而且模型参数有合理的经济解释。这也解释了尽管这两个时间序列是非平稳的，但却可以用经典的回归分析方法建立双对数因果关系回归模型的原因。

从这里，我们已经初步认识到，检验变量之间的协整关系在建立计量经济学模型中是非常重要的。而且，从变量之间是否具有协整关系出发选择模型的变量，其数据基础是牢固的，且其统计性质是优良的。

二、协整的检验

1. 两变量的 Engle-Granger 检验

在时间序列分析中，最令人关注的一种协整关系是（1, 1）阶协整。为了检验两个均呈现 1 阶单整的变量Y_t, X_t是否为协整，恩格尔和格兰杰于 1987 年提出两步检验法，也称为 **EG** 检验。

第一步，用普通最小二乘法估计(5.3.1)式并计算非均衡误差，得到

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_t$$
$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

称为协整回归(cointegrating)或静态回归(static regression)。

第二步，检验 e_t 的单整性。如果 e_t 为稳定序列 $I(0)$，则认为变量 Y_t, X_t 为(1,1)阶协整；否则，认为变量 X_t，Y_t 不存在协整关系。

检验 e_t 的单整性的方法即是§5.2 节中使用的 DF 检验或者 ADF 检验。由于协整回归中已含有截距项，则检验模型中无需再用截距项；如果协整回归中还含有趋势项，则检验模型中也无需再用时间趋势项。使用模型 1：

$$\Delta e_t = \delta\, e_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \theta_i \Delta e_{t-i} + \varepsilon_t$$

进行检验时，拒绝零假设 $H_0: \delta = 0$，意味着残差项 e_t 是平稳序列，从而说明 X 与 Y 是协整的。

一个需要注意的问题是，这里的 DF 检验或 ADF 检验是针对协整回归计算出的残差项 e_t 而非真正的非均衡误差 μ_t 进行的。而普通最小二乘法采用了残差平方和最小原理，因此估计量 δ 往往是向下偏倚的，这样将导致拒绝零假设的机会比实际情形大。于是对 e_t 平稳性检验的 DF 与 ADF 临界值应该比正常的 DF 与 ADF 临界值还要小。麦金农(Mackinnon,1991)通过模拟试验给出了协整检验的临界值，表 5.3.1 是双变量情形下不同样本容量的临界值。

表 5.3.1 双变量协整 ADF 检验临界值

样本容量	显著性水平		
	0.01	**0.05**	**0.10**
25	–4.37	–3.59	–3.22
50	–4.12	–3.46	–3.13
100	–4.01	–3.39	–3.09
∞	–3.90	–3.33	–3.05

例 5.3.1

对表 5.1.1 中经居民消费价格指数调整后的 1980—2013 年中国居民消费总量 Y_t 与总可支配收入 X_t 的数据，检验它们的对数序列 $\ln Y_t$ 与 $\ln X_t$ 间的协整关系。

§5.2 中已经检验得到：$\ln Y_t$ 与 $\ln X_t$ 都是 1 阶单整序列，即 $\ln Y_t \sim I(1)$，$\ln X_t \sim I(1)$。采用两变量的 Engle-Granger 检验方法，首先，对 $\ln Y_t$ 与 $\ln X_t$ 做如下协整回归

$$\ln \hat{Y}_t = 0.683\,7 + 0.871\,4 \ln X_t$$

$$(7.126) \quad (95.275)$$

$$\overline{R}^2 = 0.996\,4,\ \mathrm{D.W.} = 0.590\,7$$

然后，对该式计算的残差序列 e_t 进行 ADF 检验，由软件自动选择检验模型中的滞后项，得到适当的检验模型为

$$\Delta \hat{e}_t = -0.897 e_{t-1} + 0.405 \Delta e_{t-1} + 0.485 \Delta e_{t-2} + 0.568 \Delta e_{t-3} + 0.643 \Delta e_{t-4}$$

$$(-6.106) \quad (2.869) \quad (3.370) \quad (3.779) \quad (4.355)$$

由本书附录六的协整检验临界值表容易算得，5%的显著性水平下协整的 ADF 检验临界值为 $-3.3377-\frac{5.967}{34}-\frac{8.98}{34^2}=-3.521$，$e_{t-1}$ 前参数的 t 值为-6.106，因此拒绝存在单位根的假设，表明残差序列 e_t 是平稳序列。据此判断，中国居民消费总量的对数序列 $\ln Y_t$ 与总可支配收入的对数序列 $\ln X_t$ 是（1,1）阶协整的，说明了这两个变量的对数序列间存在长期稳定的“均衡”关系。

这里特别指出实际应用研究中经常出现的一个错误。我们这里采用由协整检验临界值表算得的临界值（-3.521），没有采用 ADF 检验给出的临界值（-1.953），是正确的，理由已在前文中说明。但是，在很多应用研究中忽视了这一点，而直接采用 ADF 检验给出的临界值，则是错误的，容易产生误判。

2．多变量协整关系的检验

多变量协整关系的检验要比双变量复杂一些，主要原因在于协整变量间可能存在多种稳定的线性组合。假设有 4 个 $I(1)$ 变量 Z，X，Y，W，它们有如下的长期均衡关系：

$$Z_t=\alpha_0+\alpha_1 W_t+\alpha_2 X_t+\alpha_3 Y_t+\mu_t \tag{5.3.5}$$

其中，非均衡误差项 μ_t 应是 $I(0)$ 序列：

$$\mu_t=Z_t-\alpha_0-\alpha_1 W_t-\alpha_2 X_t-\alpha_3 Y_t \tag{5.3.6}$$

然而，如果 Z 与 W，X 与 Y 间分别存在长期均衡关系：

$$Z_t=\beta_0+\beta_1 W_t+v_{1t}$$

$$X_t=\gamma_0+\gamma_1 Y_t+v_{2t}$$

则非均衡误差项 v_{1t},v_{2t} 一定是稳定序列 $I(0)$。于是它们的任意线性组合也是稳定的。例如，

$$v_t=v_{1t}+v_{2t}=Z_t-\beta_0-\gamma_0-\beta_1 W_t+X_t-\gamma_1 Y_t \tag{5.3.7}$$

一定是 $I(0)$ 序列。由于 v_t 像(5.3.6)式中的 μ_t 一样，也是 Z，X，Y，W 四个变量的线性组合，由此(5.3.7)式也成为这 4 个变量的另一个稳定线性组合。$(1,-\alpha_0,-\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_3)$是对应于(5.3.6)式的协整向量，$(1,-\beta_0-\gamma_0,-\beta_1,1,-\gamma_1)$是对应于(5.3.7)式的协整向量。

对于多变量的协整检验过程，基本与双变量情形相同，即需要检验变量是否具有同阶单整性，以及是否存在稳定的线性组合。后者需通过设置一个变量为被解释变量，其他变量为解释变量，进行普通最小二乘估计并检验残差序列是否平稳。如果不平稳，则需要更换被解释变量，进行同样的普通最小二乘估计及相应的残差项检验。当所有的变量都被作为被解释变量之后，仍不能得到平稳的残差项序列，则认为这些变量间不存在（d，d）阶协整。

同样地，检验残差项是否平稳的 DF 与 ADF 检验临界值要比通常的 DF 与 ADF 检验临界值小，而且该临界值还受到所检验的变量个数的影响。表 5.3.2 给出了麦金龙（1991）通过模拟实验得到的不同变量协整检验的临界值（其一般计算表式见附录）。

表 5.3.2 多变量协整检验 ADF 临界值

样本容量	变量数=3			变量数=4			变量数=6		
	显著性水平			显著性水平			显著性水平		
	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
25	–4.92	–4.1	–3.71	–5.43	–4.56	–4.15	–6.36	–5.41	–4.96
50	–4.59	–3.92	–3.58	–5.02	–4.32	–3.98	–5.78	–5.05	–4.69
100	–4.44	–3.83	–3.51	–4.83	–4.21	–3.89	–5.51	–4.88	–4.56
∞	–4.30	–3.74	–3.45	–4.65	–4.1	–3.81	–5.24	–4.7	–4.42

约翰森（Johansen）于 1988 年，以及与居斯利斯（Juselius）一起于 1990 年提出了一种基于向量自回归模型的多重协整检验方法，通常称为 Johansen 检验，或 JJ 检验，是一种进行多重协整检验的较好方法。这种方法将在高级课程中介绍。

3. 高阶单整变量的 Engle-Granger 检验

E–G 检验是针对 2 个及多个 $I(1)$ 变量之间的协整关系检验而提出的。在实际宏观经济研究中，经常需要检验 2 个或多个高阶单整变量之间的协整关系，例如 § 5.2 中两个 $I(2)$ 变量（中国居民消费总量 Y_t 与总可支配收入 X_t）之间的协整。虽然从直观上看，也可以用 E–G 检验，也有许多这样的例子，但是从理论上讲，是不严谨的，因为残差单位根检验的分布肯定发生改变，并且没有成熟的临界值分布表。

三、关于均衡与协整的再讨论

本节第一部分已经对长期均衡与协整的关系进行了说明。但是，在实际应用研究中，逻辑上的错误随处可见。许多应用研究以这样的思路展开：首先对时间序列进行单位根检验；然后进行多个同阶单整时间序列的协整检验；最后将协整回归方程认定为长期均衡方程。结果是经常得到一些经济行为无法解释甚至是荒谬的“长期均衡关系”。

协整方程不一定是均衡方程。它们之间至少存在以下差异：

（1）**协整方程具有统计意义，而均衡方程具有经济意义。**时间序列之间在经济上存在均衡关系，在统计上一定存在协整关系；反之，在统计上存在协整关系的时间序列之间，在经济上并不一定存在均衡关系。协整关系是均衡关系的必要条件，而不是充分条件。

（2）**均衡方程中应该包含均衡系统中的所有时间序列，而协整方程中可以只包含其中的一部分时间序列。**例如，支出法 GDP 和最终消费总额、资本形成总额、货物和服务净出口总额之间存在均衡关系，包含该 4 个序列的协整方程同时也是均衡方程；而 GDP 和最终消费总额之间，甚至最终消费总额和资本形成总额之间都可能存在协整关系，但是这些协整方程显然不是经济上的均衡方程，因为经济上的均衡关系是发生在 4 个序列之间的。

（3）**协整方程只要求随机项是平稳的，而均衡方程要求随机项是白噪声。**从 E–G 检验中可以看到，对协整回归计算的残差，只要它是平稳的。而一个描述经济变量之间均衡关系的计量经济学模型，则要求随机项是白噪声，才能满足模型的基本假设。

最重要的是第（1）点，所以，**不能由协整关系导出均衡关系，只能用协整关系检验均衡关系。**

四、误差修正模型

1. 误差修正模型

前面已经提到，对于非平稳时间序列，可通过差分的方法将其化为平稳序列，然后才可建立经典的回归分析模型。例如，如果人均消费水平(Y)与人均可支配收入(X)都是1阶单整序列，当我们建立二者之间的回归模型

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \mu_t \tag{5.3.8}$$

时，如果Y与X具有共同的向上或向下的变化趋势，为了避免虚假回归，通常需要通过差分的方法消除变量的共同变化趋势，使之成为平稳序列，再建立差分回归模型

$$\Delta Y_t = \alpha_1 \Delta X_t + v_t \tag{5.3.9}$$

式中，$v_t = \mu_t - \mu_{t-1}$。

然而，这种做法会引起两个问题：一是，如果X与Y间存在着长期稳定的均衡关系(5.3.8)式，且误差项μ_t不存在序列相关，则差分(5.3.9)式中的v_t是一个一阶移动平均时间序列，因而是序列相关的；二是，如果采用(5.3.9)式的差分形式进行估计，则关于变量水平值的重要信息将被忽略。这时模型只表达了X与Y之间的短期关系，而没有揭示它们之间的长期关系。因为，从长期均衡的观点看，Y在第t期的变化不仅取决于X本身的变化，还取决于X与Y在第$t-1$期末的状态，尤其是X与Y在第$t-1$期的不平衡程度。

另外，使用差分变量也往往会得出不能令人满意的回归方程。例如，使用(5.3.9)式回归时，很少出现截距项显著为零的情况，即我们常常会得到如下形式的方程：

$$\Delta Y_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \Delta X_t + v_t, \qquad \hat{\alpha}_0 \neq 0 \tag{5.3.10}$$

但如果使用(5.3.10)式，即使X保持不变，Y也会处于长期上升($\hat{\alpha}_0>0$)或下降($\hat{\alpha}_0<0$)的过程中，这意味着X与Y间不存在静态均衡(static equilibrium)。这与大多数具有静态均衡的经济理论假说不相符。可见，简单差分不一定能解决非平稳时间序列所遇到的全部问题，因此，误差修正模型便应运而生。

误差修正模型(Error Correction Model，ECM)是一种具有特定形式的计量经济学模型，它的主要形式是由大卫德森（Davidson），亨格瑞（Hendry），斯巴（Srba）和耶（Yeo）于1978年提出的，称为DHSY模型。为了便于理解，我们通过一个具体的模型来介绍它的结构。

假设两个变量X与Y的长期均衡关系如(5.3.8)式所示，由于现实经济中X与Y很少处在均衡点上，因此我们实际观测到的只是X与Y之间短期的或非均衡的关系，假设具有如下(1, 1)阶分布滞后形式：

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \delta Y_{t-1} + \mu_t \tag{5.3.11}$$

该模型显示出第t期的Y值，不仅与X的变化有关，而且与第$t-1$期X与Y的状态值有关。

对(5.3.11)式适当变形得

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= \beta_0 + \beta_1 \Delta X_t + (\beta_1 + \beta_2) X_{t-1} - (1-\delta) Y_{t-1} + \mu_t \\ &= \beta_1 \Delta X_t - (1-\delta)\left(Y_{t-1} - \frac{\beta_0}{1-\delta} - \frac{\beta_1 + \beta_2}{1-\delta} X_{t-1} \right) + \mu_t\end{aligned}$$

或

$$\Delta Y_t = \beta_1 \Delta X_t - \lambda (Y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_1 X_{t-1}) + \mu_t \tag{5.3.12}$$

其中 $\lambda = 1-\delta$， $\alpha_0 = \beta_0/(1-\delta)$， $\alpha_1 = (\beta_1+\beta_2)/(1-\delta)$

如果将(5.3.12)中的参数 α_0, α_1 与(5.3.8)式中的相应参数视为相等，则(5.3.12)式中括号内的项就是第 $t-1$ 期的非均衡误差项。于是(5.3.12)式表明 Y 的变化取决于 X 的变化以及前一时期的非均衡程度。同时，(5.3.12)式也弥补了简单差分(5.3.9)式的不足，因为该式含有用 X，Y 水平值表示的前期非均衡程度。因此，Y 的值已对前期的非均衡程度做出了修正。(5.3.12)式称为**一阶误差修正模型**(first-order error correction model)。

模型(5.3.12)可以写成：

$$\Delta Y_t = \beta_1 \Delta X_t - \lambda \cdot \mathrm{ecm}_{t-1} + \mu_t \tag{5.3.13}$$

其中，ecm 表示**误差修正项**。由(5.3.13)可知，一般情况下 $|\delta|<1$，所以有 $0<\lambda<1$。我们可以据此分析 ecm 的修正作用：若 t–1 时刻 Y 大于其长期均衡解 $\alpha_0+\alpha_1 X$，ecm 为正，则 $-\lambda \cdot \mathrm{ecm}$ 为负，使得 ΔY_t 减少；若 t–1 时刻 Y 小于其长期均衡解 $\alpha_0+\alpha_1 X$，ecm 为负，$-\lambda \cdot \mathrm{ecm}$ 为正，使得 ΔY_t 增大。这体现了长期非均衡误差对 Y_t 的控制。

需要注意的是，在实际分析中，变量常以对数的形式出现，其主要原因在于变量对数的差分近似地等于该变量的变化率，而经济变量的变化率常常是平稳序列，因此适合于包含在经典回归方程中。于是长期均衡模型(5.3.8)中的 α_1 可视为 Y 关于 X 的**长期弹性**(long-run elasticity)，而短期非均衡模型(5.3.11)中的 β_1 可视为 Y 关于 X 的**短期弹性**(short-run elasticity)。

更复杂的误差修正模型可依照一阶误差修正模型类似地建立。如具有季度数据的变量，可在短期非均衡模型(5.3.11)中引入更多的滞后项。引入二阶滞后项的模型为

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \beta_3 X_{t-2} + \delta_1 Y_{t-1} + \delta_2 Y_{t-2} + \mu_t \tag{5.3.14}$$

经过适当的恒等变形，可得如下误差修正模型：

$$\Delta Y_t = -\delta_2 \Delta Y_{t-1} + \beta_1 \Delta X_t - \beta_3 \Delta X_{t-1} - \lambda(Y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_1 X_{t-1}) + \mu_t \tag{5.3.15}$$

其中 $\lambda = 1-\delta_1-\delta_2$， $\alpha_0 = \beta_0/\lambda$， $\alpha_1 = (\beta_1+\beta_2+\beta_3)/\lambda$

同样地，引入三阶滞后项的误差修正模型与(5.3.15)式相仿，只不过模型中多出差分滞后项 ΔY_{t-2}， ΔX_{t-2}。

多变量的误差修正模型也可类似地建立。例如，三个变量如果存在如下长期均衡关系：

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 Z_t \tag{5.3.16}$$

则其一阶非均衡关系可写成

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \gamma_1 Z_t + \gamma_2 Z_{t-2} + \delta Y_{t-1} + \mu_t \; \gamma_2 Z_{t-1} + \delta Y_{t-1} + \mu_t \tag{5.3.17}$$

于是它的一个误差修正模型为

$$\Delta Y_t = \beta_1 \Delta X_t + \gamma_1 \Delta Z_t - \lambda(Y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 Z_{t-1}) + \mu_t \tag{5.3.18}$$

其中 $\lambda = 1-\delta$， $\alpha_0 = \beta_0/\lambda$， $\alpha_1 = (\beta_1+\beta_2)/\lambda$， $\alpha_2 = (\gamma_1+\gamma_2)/\lambda$

2．误差修正模型的建立

（1）格兰杰表述定理。误差修正模型有许多明显的优点，如一阶差分项的使用消除

了变量可能存在的趋势因素，从而避免了虚假回归问题；一阶差分项的使用也消除模型可能存在的多重共线性问题；误差修正项的引入保证了变量水平值的信息没有被忽视；由于误差修正项本身的平稳性，使得该模型可以用经典的回归方法进行估计，尤其是模型中差分项可以使用通常的t检验与F检验来进行选取，等等。于是，一个重要的问题就是是否变量间的关系都可以通过误差修正模型来表述。就此问题，恩格尔与格兰杰于1987年提出了著名的格兰杰表述定理(Granger representation theorem)：

如果变量X与Y是协整的，则它们之间的短期非均衡关系总能由一个误差修正模型表述，即

$$\Delta Y_t = \text{lagged}(\Delta Y, \Delta X) - \lambda \cdot \text{ecm}_{t-1} + \mu_t, \qquad 0<\lambda<1 \tag{5.3.19}$$

其中，ecm_t是非均衡误差项或者说是长期均衡偏差项，λ是短期调整参数。

对于上述(1,1)阶自回归分布滞后模型(5.3.11)式，如果

$$Y_t \sim I(1), \qquad X_t \sim I(1)$$

那么，(5.3.12)式左边$\Delta Y_t \sim I(0)$，右边的$\Delta X_t \sim I(0)$，于是，只有Y与X协整，才能保证右边也是$I(0)$。因此，建立误差修正模型，需要首先对变量进行协整分析，以发现变量之间的协整关系，即长期均衡关系，并以这种关系构成误差修正项。然后建立短期模型，将误差修正项看作一个解释变量，连同其他反映短期波动的解释变量一起，建立短期模型，即误差修正模型。

注意，由于(5.3.19)式中没有明确指出ΔY与ΔX的滞后项数，因此，可以是多个；同时，由于一阶差分项是$I(0)$变量，因此模型中也允许使用X的非滞后差分项ΔX_t。

格兰杰表述定理可类似地推广到多个变量的情形中去。

（2） Engle-Granger(E-G)两步法。由协整与误差修正模型的关系，可以得到误差修正模型建立的E-G两步法：

第一步，进行协整回归(普通最小二乘法)，检验变量间的协整关系，估计协整向量(长期均衡关系参数)；

第二步，若协整性存在，则以第一步求到的残差作为非均衡误差项加入到误差修正模型中，并用普通最小二乘法估计相应参数。

需要注意的是，在进行变量间的协整检验时，如有必要可在协整回归式中加入趋势项，这时，对残差项的稳定性检验就无需再设趋势项。另外，第二步中变量差分滞后项的多少，可以残差项序列是否存在自相关性来判断。如果存在自相关，则应加入变量差分的滞后项。

（3）直接估计法。也可以采用打开误差修整模型中非均衡误差项括号的方法直接用普通最小二乘法估计模型。但仍需事先对变量间的协整关系进行检验。例如，对双变量

误差修正模型(5.3.12)式，可打开非均衡误差项的括号直接估计下式：

$$\Delta Y_t = \lambda\alpha_0 + \beta_1\Delta X_t - \lambda Y_{t-1} + \lambda\alpha_1 X_{t-1} + \mu_t$$

这时短期弹性与长期弹性可一并获得。需注意的是，用不同方法建立的误差修正模型结果也往往不一样。

例 5.3.2

建立中国居民消费总量 Y_t 的误差修正模型。

例 5.3.1 中验证了中国居民消费总量（Y_t）与总可支配收入（X_t）的对数序列间成（1，1）阶协整关系。下面尝试建立它们的误差修正模型。

以 $\ln Y_t$ 关于 $\ln X_t$ 的协整回归中的平稳残差序列 e_t 作为误差修正项，可建立如下误差修正模型

$$\Delta\ln\hat{Y}_t = 0.521\Delta\ln X_t + 0.393\Delta\ln Y_{t-1} - 0.226 e_{t-1} \qquad (5.3.20)$$

$$(5.847) \qquad (3.854) \qquad (-2.174)$$

$$\bar{R}^2 = 0.345\ 0$$

(5.3.20)式中包含滞后项 $\Delta\ln Y_{t-1}$，是由对不包含该项的模型估计式进行 LM 序列相关性检验所决定的。e_{t-1} 的参数估计值为负，表明了前一期的非均衡误差对后一期居民消费的修正。注意：**如果误差修正模型中 e_{t-1} 的参数估计值为正，模型肯定是错误的。**

由例 5.3.1 中的协整回归式可得 $\ln Y_t$ 关于 $\ln X_t$ 的长期弹性为 0.871 4；由（5.3.20）式可得 $\ln Y_t$ 关于 $\ln X_t$ 的短期弹性为 0.521。

§5.4 格兰杰因果关系检验

格兰杰因果关系检验（Granger test of causality）在时间序列计量经济学模型中被广泛采用，同时也存在滥用和错用现象，本节将进行专门的讨论。为了讨论格兰杰因果关系检验，需要对时间序列自回归模型（Autoregression Models, AR）和向量自回归模型（Vector Autoregression Models, VAR）作简单的介绍。

一、时间序列自回归模型

1. 自回归模型

时间序列自回归模型是指仅用它的过去值及随机扰动项所建立起来的模型，其一般形式为

$$X_t = F(X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, \mu_t) \qquad (5.4.1)$$

建立具体的自回归模型，需解决如下三个问题：模型的具体形式、时序变量的滞后期以及随机扰动项的结构。例如，取线性方程、1 期滞后以及白噪声随机扰动项（$\mu_t = \varepsilon_t$），模型将是一个 **1 阶自回归过程** AR(1)

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{5.4.2}$$

这里，ε_t 特指白噪声。

一般的 ***p* 阶自回归过程 AR(*p*)**是

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \mu_t \tag{5.4.3}$$

如果随机扰动项 μ_t 是个白噪声（$\mu_t = \varepsilon_t$），则称（5.4.3）为一**纯 AR(*p*)过程**（pure AR(*p*) process），记为

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \tag{5.4.4}$$

如果 μ_t 不是一个白噪声，通常认为它是一个 q 阶的**移动平均**（moving average）**过程 MA(*q*)**：

$$\mu_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{5.4.5}$$

（5.4.5）式给出了一个**纯 MA(*q*)过程**（pure MA(*p*) process）。将（(5.4.3）式与（5.4.5）式结合，得到一个一般的**自回归移动平均**（autoregressive moving average）**过程 ARMA(*p*,*q*)**：

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{5.4.6}$$

（5.4.6）式表明，一个随机时间序列可以通过一个自回归移动平均过程生成，即该序列可以由其自身的过去或滞后值以及随机扰动项来解释。如果该序列是平稳的，即它的行为并不会随着时间的推移而变化，那么就可以通过该序列过去的行为来预测未来。

2．AR(*p*)模型的平稳性条件

时间序列自回归模型作为随机过程的描述，它的平稳性与该随机过程的平稳性是等价的，因此，可通过它所生成的随机时间序列的平稳性来判断。如果一个 p 阶自回归模型 AR(*p*)生成的时间序列是平稳的，就说该 AR(*p*)模型是平稳的，否则，就说该 AR(*p*)模型是非平稳的。

考虑（5.4.4）式的 p 阶自回归模型 AR(*p*)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

引入**滞后算子**（lag operator）L：

$$LX_t = X_{t-1},\quad L^2 X_t = X_{t-2},\quad \cdots\cdots,\quad L^p X_t = X_{t-p}$$

（5.4.4）式变换为

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p) X_t = \varepsilon_t$$

记 $\Phi(L) = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)$，则称多项式方程

$$\Phi(z)=(1-\phi_1 z-\phi_2 z^2-\cdots-\phi_p z^p)=0$$

为 AR(p)的**特征方程**（characteristic equation）。可以证明，如果该特征方程的所有根在单位圆外（根的模大于 1），则 AR(p)模型是平稳的。§5.2 中介绍的时间序列平稳性的单位根检验，正是由此而发展的。

例 5.4.1

AR(1)模型的平稳性条件。对 1 阶自回归模型 AR(1)

$$X_t=\varphi X_{t-1}+\varepsilon_t$$

方程两边平方再求数学期望，得到 X_t 的方差

$$E(X_t^2)=\varphi^2 E(X_{t-1}^2)+E(\varepsilon_t^2)+2E(X_{t-1}\varepsilon_t)$$

由于 X_t 仅与 ε_t 相关，因此，$E(X_{t-1}\varepsilon_t)$=0。如果该模型稳定，则有 $E(X_t^2)=E(X_{t-1}^2)$，从而上式可变换为

$$\gamma_0=\delta_X^2=\frac{\delta_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}$$

在平稳条件下，该方差是一非负的常数，从而有 $|\phi|<1$。而 AR(1)的特征方程

$$\Phi(z)=1-\varphi z=0$$

的根为

$$z=1/\varphi$$

AR(1)稳定，即 $|\phi|<1$，意味着特征根大于 1。

同样可以证明，对于（5.4.4）式的高阶自回模型 AR(p)，其平稳性的必要条件是

$$\phi_1+\phi_2+\cdots+\phi_p<1$$

充分条件是

$$|\phi_1|+|\phi_2|+\cdots+|\phi_p|<1$$

对于一个平稳的随机时间序列，如何识别它是否遵循一纯 AR 过程，所使用的工具主要是时间序列的自相关函数（autocorrelation function，ACF）及偏自相关函数（partial autocorrelation function，PACF）。如果经识别为一纯 AR 过程，可以采用普通最小二乘等方法估计其参数。关于时间序列自回归模型的识别和估计，读者可参考其他教科书，例如本书第三版 §8.2。

二、时间序列向量自回归模型

1. 向量自回归模型表达式

将上述单个时间序列自回归模型扩展到多个时间序列，即构成向量自回归模型。西

姆斯（A.Sims，1980）等人将向量自回归模型引入宏观经济分析中，使之成为现代时间序列分析的主要模型之一。

含有 k 个时间序列（也称变量）、p 期滞后的向量自回归模型 VAR(p) 表示如下：

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t,\quad t = 1, 2, \cdots, T \tag{5.4.7}$$

其中，

$$\boldsymbol{Y}_{t-i} = \begin{pmatrix} Y_{1t-i} \\ Y_{2t-i} \\ \vdots \\ Y_{kt-i} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \cdots, p$$

$$\boldsymbol{A}_j = \begin{bmatrix} \alpha_{11.j} & \alpha_{12.j} & \cdots & \alpha_{1k.j} \\ \alpha_{21.j} & \alpha_{22.j} & \cdots & \alpha_{2k.j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1.j} & \alpha_{k2.j} & \cdots & \alpha_{kk.j} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \cdots, p$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_k)',\quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \cdots, \varepsilon_{kt})'$$

其中，$\boldsymbol{Y}_t$ 是 k 维内生变量向量，p 是滞后阶数，样本数目为 T。$\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_p$ 是 $k \times k$ 系数矩阵。$\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ 是 k 维随机扰动向量，它们相互之间可以同期相关，但不与自己的滞后值相关,也不与(5.4.7)式右边的变量相关。$\boldsymbol{\Sigma}$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的协方差矩阵，是一个 $k \times k$ 的正定矩阵。

向量自回归模型在建模过程中只需明确两个量。一个是所含变量个数 k，即共有哪些变量是相互有关系的，并且需要把这些变量包括在模型中；另一个是自回归的最大滞后阶数 p，通过选择合理的 p 来使模型能反映出变量间相互影响的关系并使得模型的随机误差项 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 是白噪声。

向量自回归模型从形式上看是联立方程模型，由于每个方程的右边不包含任何当期变量，于是可以作为独立的方程，采用普通最小二乘法等方法估计参数。

西姆斯（1986）以及布兰查德（Q. J. Blanchard）和匡赫（D. Quah）（1989）发展了向量自回归模型，提出了**结构向量自回归模型**（Structural Vector Auto-Regression，SVAR）。结构向量自回归模型中包含了变量之间的当期关系。变量之间的当期关系揭示了变量之间的相互影响，实际上是对向量自回归模型施加了基于经济理论的限制性条件，从而识别变量之间的结构关系。结构向量自回归模型每个方程的左边是内生变量，右边是自身的滞后和其他内生变量的当期和滞后。**含有 k 个变量的结构向量自回归模型** $SVAR(p)$ 表示如下：

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{Y}_t + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t,\quad t = 1, 2, \cdots, T \tag{5.4.8}$$

2. 关于向量自回归模型的讨论

正如§1.2 中提及的，经典计量经济学模型是基于经济学理论和经济行为关系而构建

的结构模型，这是它的一个最重要的特征。发生于20世纪70年代，以卢卡斯（E.Lucas）、萨金特（J. Sargent）、西姆斯等为代表的对经典计量经济学的批判，其后果之一是导致计量经济学模型由经济理论导向转向数据关系导向。关于这个问题，本书§7.2将进行详细的讨论。于是，在经济预测领域，特别是宏观经济预测领域，经典的计量经济学结构模型（包括联立方程结构模型）几乎为向量自回归模型所替代。原因在于经典的计量经济学结构模型是以理论为导向而构建的，特别是凯恩斯宏观经济理论，而经济理论并不能为现实经济活动中变量之间的关系提供严格的解释。而**向量自回归模型是一种非结构化模型**，它主要通过实际经济数据而非经济理论来确定经济系统的动态结构，建模时无需提出先验理论假设。

向量自回归模型自提出以来，已经成为分析与预测多个相关经济指标最易操作的模型之一，常用于预测相互联系的时间序列系统及分析随机扰动对变量系统的动态冲击，从而解释各种经济冲击对经济变量形成的影响。例如，石油价格和汇率是最受国际社会关注的两大焦点。石油价格的波动对于全球经济的影响不言而喻，同时在经济全球化的背景下，汇率对国际贸易、国际金融的影响也可谓是牵一发而动全身。随着我国经济的增长,对石油的消费需求也与日俱增，近年来石油价格的大幅波动必将影响我国实际汇率的变化。如果构建石油价格和汇率的结构模型，由于影响因素和传导路径十分复杂，难以收到好的成效。而采用向量自回归模型，可以方便地分析石油价格上涨冲击对实际汇率波动的影响程度，以及需求、供给、货币这些宏观因素对汇率波动的影响。

由于向量自回归模型没有揭示经济系统中变量之间的直接因果关系，因此也具有应用上的局限性。首先，向量自回归模型主要应用于经济预测，对于经济结构分析和政策评价等应用领域，它的应用存在方法论障碍；其次，即使在经济预测方面，它的应用也是有条件的。例如，向量自回归模型避免了结构约束问题，是否就可以成功地进行宏观经济预测？显然不是。关键在于宏观经济运行中是否存在结构约束。所谓结构约束，实际就是政府干预。对于那些没有政府干预，完全按照市场规律运行的经济体，向量自回归模型可以进行成功的预测。相反，对于存在政府干预的经济体，采用向量自回归模型进行的预测，很难取得成功。所以，人们应用向量自回归模型，更多地是将它作为一个动态平衡系统，分析该系统受到某种冲击时系统中各个变量的动态变化，以及每一个冲击对内生变量变化的贡献度，即**脉冲响应分析**和**方差分解分析**。向量自回归模型的脉冲响应分析和方差分解分析功能，在各种应用软件中是很容易实现的。

三、格兰杰因果关系检验及其应用

向量自回归模型中的每一个方程旨在揭示某变量的变化受其自身及其他变量过去行为的影响。然而，许多经济变量有着相互的影响关系，如GDP的增长能够促进消费的增长，而反过来，消费的变化又是GDP变化的一个组成部分，因此，消费增加又能促进

GDP 的增加。现在的问题是：当两个变量间在时间上有先导-滞后关系时，能否从统计上考察这种关系是单向的还是双向的？即主要是一个变量过去的行为在影响另一个变量的当前行为呢？还是双方的过去行为在相互影响着对方的当前行为？格兰杰（1969）提出了一个简单的包括两个变量的向量自回归模型检验方法，习惯上称为**格兰杰因果关系检验**。

1. 格兰杰因果关系检验的表述

在时间序列情形下，两个经济变量 X 、Y 之间的格兰杰因果关系定义为：若在包含了变量 X 、Y 的过去信息的条件下，对变量 Y 的预测效果要优于只单独由 Y 的过去信息对 Y 进行的预测效果，即变量 X 有助于解释变量 Y 的将来变化，则认为变量 X 是引致变量 Y 的格兰杰原因。考察 X 是否影响 Y 的问题，主要看当期的 Y 能够在多大程度上被过去的 X 解释，在 Y_t 方程中加入 X 的滞后值是否使解释程度显著提高。如果 X 在 Y 的预测中有帮助，或者 X 与 Y 的相关系数在统计上显著时，就可以说"X 是 Y 的 Granger 原因"。

对两变量 Y 与 X ，格兰杰因果关系检验要求估计以下回归模型：

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_{t-i} + \mu_t \tag{5.4.9}$$

$$X_t = \delta_0 + \sum_{i=1}^{m} \delta_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Y_{t-i} + v_t \tag{5.4.10}$$

可能存在有四种检验结果：

（1） X 对 Y 有单向影响，表现为（5.4.9）式 X 各滞后项前的参数整体不为零，而（5.4.10）式 Y 各滞后项前的参数整体为零；

（2） Y 对 X 有单向影响，表现为（5.4.10）式 Y 各滞后项前的参数整体不为零，而（5.4.9）式 X 各滞后项前的参数整体为零；

（3） Y 与 X 间存在双向影响，表现为（5.4.9）式 X 各滞后项前的参数整体不为零，同时（5.4.10）式 Y 各滞后项前的参数整体也不为零；

（4） Y 与 X 是独立的，表现为（5.4.9）式 X 各滞后项前的参数整体为零，同时（5.4.10）式 Y 各滞后项前的参数整体也为零。

格兰杰检验是通过受约束的 F 检验完成的。如针对 X 不是 Y 的格兰杰原因这一假设，即针对（5.4.9）式中 X 滞后项前的参数整体为零的假设，分别做包含与不包含 X 滞后项的回归，记前者的残差平方和为 $\mathrm{RSS_U}$，后者的残差平方和为 $\mathrm{RSS_R}$；再计算 F 统计量：

$$F = \frac{(\mathrm{RSS_R} - \mathrm{RSS_U})/m}{\mathrm{RSS_U}/(n-k)} \tag{5.4.11}$$

式中，m 为 X 的滞后项的个数，n 为样本容量，k 为包含可能存在的常数项及其他变量

在内的无约束回归模型的待估参数的个数。

如果计算的 F 值大于给定显著性水平 α 下 F 分布的相应临界值 $F_{\alpha}(m,n-k)$，则拒绝原假设，认为 X 是 Y 的格兰杰原因。

由于假设检验的零假设是不存在因果关系，在该假设下 F 统计量服从 F 分布，因此严格地说，该检验应该称为**格兰杰非因果关系检验**。

2．应用中的几个实际问题

需要指出的是，在实际应用格兰杰因果关系检验时，需要注意以下几个问题：

（1）**滞后期长度的选择问题**。检验结果对于滞后期长度的选择比较敏感，不同的滞后期可能会得到不同的检验结果。因此，一般而言，需要进行不同滞后期长度下的检验，观察其敏感程度；并且根据模型中随机干扰项不存在序列相关时的滞后期长度来选取滞后期。

（2）**时间序列的平稳性问题**。从理论上讲，格兰杰因果关系检验是针对平稳时间序列的。对于同阶单整的非平稳序列，理论上讲不能直接采用。如果将变量经过差分使之成为平稳序列以后再进行检验，经济意义就发生了变化，检验的就不是两个变量之间的关系，而是两个变量增加量之间的关系。如何看待这个问题？模拟试验表明，当两个序列逐渐由平稳过程向非平稳过程过渡时，检验存在因果关系的概率出现一定程度的上升。但上升幅度远小于两个序列之间因果关系的显著性增强时所引起的上升幅度。所以，同阶单整非平稳序列的格兰杰因果检验结果具有一定程度的可靠性。

（3）**样本容量问题**。时间序列的样本容量对检验结果具有影响。模拟试验表明，对于两个平稳序列，随着样本容量的增大，判断出存在格兰杰因果关系的概率显著增大。

（4）**格兰杰因果关系检验是必要性条件检验，而不是充分性条件检验**。经济行为上存在因果关系的时间序列，应该能够通过格兰杰因果关系检验；而在统计上通过格兰杰因果关系检验的时间序列，在经济行为上并不一定存在因果关系。模拟试验表明，经济行为上不存在因果关系的平稳时间序列之间也可能存在着统计上的因果关系。也就是说，格兰杰因果关系是统计意义上的，而不是经济意义上的。这是一个最值得重视的问题。

例 5.4.2

§5.1 中表 5.1.1 列出了 1980—2013 年中国居民实际消费总支出（Y）和实际可支配收入（X）时间序列数据，用后一年数据除以前一年数据，再减 1 可以分别算出 1981—2013 年实际消费总支出年增长率（GY）和实际可支配收入年增长率（GX）时间序列。在§5.2 的案例中，已经检验 GY 和 GX 为平稳序列。从经济学理论和经济行为分析出发，分析 GY 和 GX 之间的关系，可以假定 GX 是 GY 的原因变量。下面通过格兰杰因果关系检验，检验该假定是否成立。

检验模型取 1 阶滞后，Eviews 软件给出的估计结果如表 5.4.1(a)所示。由 F 相伴概率知，在 10%的显著性水平下，拒绝“GX 不是 GY 的格兰杰原因”的假设，但不拒绝“GY 不是 GX 的格兰杰原因”的假设。因此，从 1 阶滞后的情况看，居民实际可支配收入年增长率（GX）是实际消费总支出年增长率（GY）的格兰杰原因。从检验模型随机干扰项 1 阶序列相关的 LM 检验看，以 GY 为被解释变量的模型的 LM=0.4516，对应的伴随概率 P=0.5016，表明在 10%的显著性水平下，该检验模型不存在序列相关性；以 GX 为被解释变量的模型的 LM=0.0580，对应的伴随概率 P=0.8096，表明在 10%的显著性水平下，该检验模型也不存在序列相关性。所以，检验模型取 1 阶滞后得到的检验结果是可靠的。

表 5.4.1(b)、(c)、(d)分别列出了检验模型取 2 阶、3 阶、4 阶滞后，Eviews 软件给出的估计结果。可以看到，如果检验模型取 3 阶滞后，则既不拒绝“GX 不是 GY 的格兰杰原因”的假设,也不拒绝“GY 不是 GX 的格兰杰原因”的假设，则 GX 与 GY 相互独立。如果检验模型取 4 阶滞后，在 5%的显著性水平下，拒绝“GY 不是 GX 的格兰杰原因”的假设，但不拒绝“GX 不是 GY 的格兰杰原因”的假设,与检验模型取 1 阶滞后的结果完全相反。由此可见，正确地选取检验模型的滞后期，是十分重要的。

表 5.4.1(e)列出了检验模型取 1 阶滞后，样本期减少 10 年（以 1991—2013 年数据为样本），Eviews 软件给出的估计结果。与(a)比较可以看到，样本期减少，拒绝“GX 不是 GY 的格兰杰原因”的显著性明显降低。与模拟结果一致。所以，为了提高检验结果的可靠性，应该尽可能采用较大的样本。

表 5.4.1　GX 与 GY 格兰杰因果关系检验

(a)

Pairwise Granger Causality Tests
Sample: 1981 2013
Lags: 1

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Probability
GX does not Granger Cause GY	32	3.85605	0.05922
GY does not Granger Cause GX		0.23157	0.63397

(b)

Pairwise Granger Causality Tests
Sample: 1981 2013
Lags: 2

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Probability
GX does not Granger Cause GY	31	1.74041	0.19527
GY does not Granger Cause GX		0.21169	0.81059

(c) 续表

Pairwise Granger Causality Tests
Sample: 1981 2013
Lags: 3

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Probability
GX does not Granger Cause GY	30	1.05898	0.38570
GY does not Granger Cause GX		0.34281	0.79459

(d)

Pairwise Granger Causality Tests
Sample: 1981 2013
Lags: 4

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Probability
GX does not Granger Cause GY	29	1.77040	0.17444
GY does not Granger Cause GX		3.01080	0.04270

(e)

Pairwise Granger Causality Tests
Sample: 1991 2013
Lags: 1

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Probability
GX does not Granger Cause GY	23	2.26242	0.14818
GY does not Granger Cause GX		0.63942	0.43332

例 5.4.3

§5.1 中表 5.1.1 列出了 1980—2013 年中国居民实际消费总支出（Y）和实际可支配收入（X）时间序列数据，其中，实际可支配收入是消除通货膨胀因素的 GDP 与宏观税收总额之差。因此，分析 Y 与 X 之间的关系，实际上是分析居民总消费与 GDP 之间的关系。从经济学理论以及宏观经济行为出发，可以假定二者之间是互为因果，GDP 既影响居民总消费，反过来也受居民消费的影响，刺激消费可以促进经济增长。严格说，格兰杰因果关系检验是对平稳时间序列而言的，但根据模拟试验，对于非平稳时间序列，也具有一定的可靠性。在§5.2 的案例中，已经检验 Y 和 X 都是 2 阶单整序列，这里对它们进行格兰杰因果关系检验。

对检验模型进行序列相关的 LM 检验发现，检验模型必须取 4 阶滞后，才能消除随机项的序列相关。表 5.4.2(a)列出了格兰杰因果关系检验结果。从结果看，在 1%的显著性水平下，既拒绝“X 不是 Y 的格兰杰原因”的假设,也拒绝“Y 不是 X 的格兰杰原因”的假设，则 X 与 Y 是互为因果。从经济学理论及宏观经济行为出发提出的假定得到检验。

表 5.4.2(b)列出了检验模型取 1 阶滞后时格兰杰因果关系检验结果。结果显示，X 与 Y 之间呈现单向因果关系，即拒绝“X 不是 Y 的格兰杰原因”的假设,但不拒绝“Y 不是 X 的格兰杰原因”的假设。从这里，再一次看到，在实际应用研究中正确选择检验模型的重要性。

表 5.4.2　Y 与 X 格兰杰因果关系检验

(a)

Pairwise Granger Causality Tests
Sample: 1980 2013
Lags: 4

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Probability
X does not Granger Cause Y	30	7.22004	0.00080
Y does not Granger Cause X		6.63941	0.00129

(b)

Pairwise Granger Causality Tests
Sample: 1980 2013
Lags: 1

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Probability
X does not Granger Cause Y	33	6.62635	0.01523
Y does not Granger Cause X		0.12805	0.72297

本章练习题

1. 对一元线性回归模型

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \mu_t$$

（1）假如其他基本假设全部满足，但只有 $\mathrm{Cov}(\mu_i, \mu_j) \neq 0$，试证明，估计的斜率项仍是无偏的；

（2）当自变量存在正相关，随机干扰项存在如下一阶序列相关时 $\mu_t = \rho\mu_{t-1} + \varepsilon_t$，试证明估计的斜

率项的方差为

$$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_1)=\frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}+\frac{2\sigma^2}{\sum x_t^2}[\rho\frac{\sum_{t=1}^{n-1}x_t x_{t+1}}{\sum x_t^2}+\rho^2\frac{\sum_{t=1}^{n-2}x_t x_{t+2}}{\sum x_t^2}+\cdots\rho^{n-1}\frac{x_1 x_n}{\sum x_t^2}]$$

并就 $\rho>0$ 与 $\rho<0$，X_t 存在正或负序列相关时与模型满足所有基本假定下的 OLS 估计 $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)$ 的大小进行比较。

2. 1980—2013 年中国全社会固定资产投资总额 X 与工业总增加 Y 的统计资料如下表所示。

单位：亿元

年份	全社会固定资产投资（X）	工业增加值（Y）	年份	全社会固定资产投资（X）	工业增加值（Y）
1980	910.9	1 996.5	1997	24 941.1	32 921.4
1981	961.0	2 048.4	1998	28 406.2	34 018.4
1982	1 230.4	2 162.3	1999	29 854.7	35 861.5
1983	1 430.1	2 375.6	2000	32 917.7	40 033.6
1984	1 832.9	2 789.0	2001	37 213.5	43 580.6
1985	2 543.2	3 448.7	2002	43 499.9	47 431.3
1986	3 120.6	3 967.0	2003	55 566.6	54 945.5
1987	3 791.7	4 585.8	2004	70 477.4	65 210.0
1988	4 753.8	5 777.2	2005	88 773.6	77 230.8
1989	4 410.4	6 484.0	2006	109 998.2	91 310.9
1990	4 517.0	6 858.0	2007	137 323.9	110 534.9
1991	5 594.5	8 087.1	2008	172 828.4	130 260.2
1992	8 080.1	10 284.5	2009	224 598.8	135 239.9
1993	13 072.3	14 188.0	2010	251 683.8	160 722.2
1994	17 042.1	19 480.7	2011	311 485.1	188 470.2
1995	20 019.3	24 950.6	2012	374 694.7	199 670.7
1996	22 913.5	29 447.6	2013	446294.1	210689.4

试问：

（1）当设定模型为 $\ln Y_t=\beta_0+\beta_1\ln X_t+\mu_t$ 时，是否存在序列相关？

（2）采用普通最小二乘法和稳定标准误方法分别估计模型，比较参数估计量的差异和它们的标准差的差异，并说明稳定标准误方法克服序列相关后果的原理。

（3）若原模型存在序列相关，试用广义最小二乘法估计原模型。

3. 设时间序列 $\{X_t\}$ 是由 $X_t=\delta_0+\delta_1 t+\varepsilon_t$ 生成的，如果 ε_t 是一零均值、同方差、无序列相关的白噪声，问：（1） X_t 是平稳时间序列吗？（2） $X_t-E(X_t)$ 是平稳时间序列吗？

4. 设时间序列 X_t 是由下面随机过程生成的：$X_t=Z_t+\varepsilon_t$，其中 ε_t 为一均值为 0，方差为 σ_ε^2 的白

噪声序列，Z_t 是一均值为 0，方差为 σ_z^2、协方差恒为常数 a 的平稳时间序列。ε_t 与 Z_t 不相关。

（1） 求 X_t 的期望与方差，它们与时间 t 有关吗？

（2） 求协方差 $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k})$，并指出 X_t 是否是平稳的。

（3） 证明：X_t 的自相关函数为 $\rho_k = a/(\sigma_z^2 + \sigma_\varepsilon^2)$。

5. 如果时间序列 Z_t 经过 ADF 检验为一个 $I(1)$ 序列，试写出最终检验模型可能的形式。

6. 采用表 5.1.1 中列出的 1980—2013 年中国居民实际可支配收入（X_t）时间序列数据，分别对 X_t、$\ln X_t$、X_t / X_{t-1} 3 个序列进行单位根检验。

7. 假设两时间序列 X_t 与 Y_t 都是随机游走序列。证明：如果 X_t 与 Y_t 是协整的，则 X_t 与 Y_{t-1} 也是协整的。

8. 假设两时间序列 X_t 与 Y_t 都是 $I(1)$ 序列，但对某个不为 0 的 β，使 $Y_t - \beta X_t$ 是 $I(0)$。证明：对于任何 $\delta \neq \beta$，组合 $Y_t - \delta X_t$ 一定是 $I(1)$ 的。

9. 假设两时间序列 X_t 与 Y_t 满足 $Y_t = \beta X_t + \varepsilon_{1t}$ 与 $\Delta X_t = \alpha \Delta X_{t-1} + \varepsilon_{2t}$，其中，$\beta \neq 0$，$|\alpha| < 1$，且 ε_{1t} 与 ε_{2t} 分别是两 $I(0)$ 序列。证明：从该两个方程可以推出一个如下形式的误差修正模型：

$$\Delta Y_t = \alpha_1 \Delta X_{t-1} + \delta(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + \varepsilon_t$$

其中，$\alpha_1 = \beta\alpha$，$\delta = -1$ $\varepsilon_t = \varepsilon_{1t} + \beta\varepsilon_{2t}$。

10. 观察中国货物进出口数据，发现在一个很长的时期内，两者间有很强的同步性，由于中国的加工贸易占总贸易量的一半左右。一种观点认为中国的货物进口很大程度上受货物出口波动的影响；一种观点则认为情况是相反的，即中国的货物出口很大程度上受货物进口波动的影响；另外一种观点认为二者互相影响。下表给出了 1978—2007 年中国货物进出口额的自然对数序列（自 2008 年世界金融危机以后，数据出现了奇异性）。

年份	*LX*	*LM*	年份	*LX*	*LM*
1978	4.5799	4.6904	1993	6.8215	6.9466
1979	4.9171	5.0543	1994	7.0985	7.0528
1980	5.1996	5.2993	1995	7.3051	7.1860
1981	5.3941	5.3945	1996	7.3202	7.2358
1982	5.4081	5.2622	1997	7.5109	7.2610
1983	5.4040	5.3655	1998	7.5159	7.2459
1984	5.5661	5.6135	1999	7.5752	7.4128
1985	5.6113	6.0462	2000	7.8208	7.7191
1986	5.7346	6.0617	2001	7.8865	7.7979
1987	5.9774	6.0687	2002	8.0883	7.9901
1988	6.1637	6.3148	2003	8.3853	8.3255
1989	6.2642	6.3825	2004	8.6883	8.6327
1990	6.4312	6.2795	2005	8.9385	8.7947
1991	6.5780	6.4582	2006	9.1788	8.9765
1992	6.7445	6.6920	2007	9.4074	9.1653

（1）对 LX 与 LM 序列进行单位根检验，检验它们的平稳性；

（2）检验 LX 与 LM 的单整性；

（3）对 LX 与 LM 序列进行格兰杰因果关系检验；

（4）检验 LX 与 LM 的协整性；

（5）如果 LX 与 LM 是协整的，请估计 LX 关于 LM 的误差修正模型。