统计学原理(Statistic)

胡华平

西北农林科技大学

经济管理学院数量经济教研室

huhuaping01@hotmail.com

2021-05-08

第四章 数据的概括性度量

4.1 总量程度的度量

4.2 相对程度的度量

4.3 集中趋势的度量

4.4 离散程度的度量

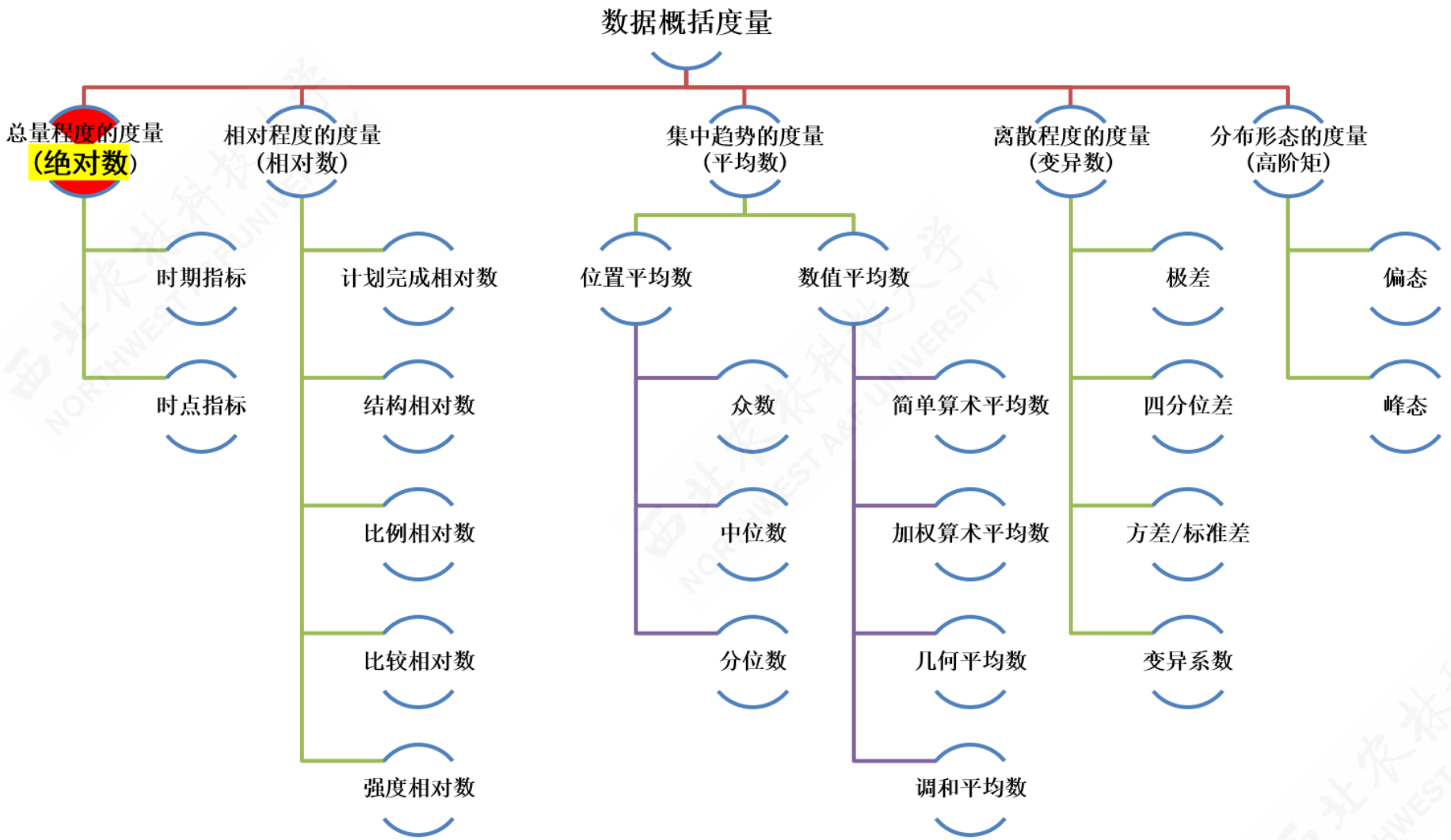
4.5 分布形态的度量

9.1 总量程度的度量

时期指标

时点指标

内容导航


数据概括度量
总量程度的度量
(绝对数)
相对程度的度量
(相对数)
集中趋势的度量
(平均数)
离散程度的度量
(变异数)
分布形态的度量
(高阶矩)
时期指标
时点指标
计划完成相对数
结构相对数
比例相对数
比较相对数
强度相对数
位置平均数
数值平均数
众数
中位数
分位数
简单算术平均数
加权算术平均数
几何平均数
调和平均数
极差
四分位差
方差/标准差
变异系数
偏态
峰态

总量指标的概念和作用

总量指标，又称为**绝对指标**，是反映社会经济现象一定时间、地点、条件下总的规模、水平的统计指标。

> 总量指标表现形式是绝对数，也可表现为绝对差数。
>
> 例：2009年我国财政收入6.8万亿元，比上年增收近8000亿元。

作用：

- 总量指标能反映一个国家的基本国情和国力，反映某部门、单位等人、财、的基本数据 。
- 总量指标是进行决策和科学管理的依据之一 。
- 总量指标是计算相对指标和平均指标的基础。

总量指标的分类

按其反映的**内容**不同可分为：

- **总体单位总量**：度量总体的单位数数量。例如，全班学生总人数。
- **总体标志总量**：度量总体中某个标志值总和的量。例如全班所有学生的总成绩。

总量指标的分类

按其反映的**内容**不同可分为：

- **总体单位总量**：度量总体的单位数数量。例如，全班学生总人数。
- **总体标志总量**：度量总体中某个标志值总和的量。例如全班所有学生的总成绩。

按其反映的**时间状况**不同可分为：

- **时期指标**：反映现象在某一时期发展过程的总数量。可连续计数，与时间长短有关，是累计结果。

> 例如：一定时期的产品产量、产值、商品销售量、工资总额等。

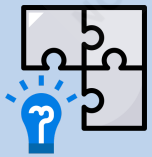
- **时点指标**：反映现象在某一时刻的状况。间断计数，与时间间隔无关，不能累计。

> 例如：特定时刻上，人口数、企业数、商品库存数、流动资金额。

总量指标的计算

计算总量指标时需要考虑：

- 现象的同类性。
- 明确的统计含义。
- 计量单位必须一致。



幽默故事：

钱是这样贬值的：

10元=10角×10角 =1元×1元 =1元

总量指标的计量单位

总量指标计量单位主要有三种形式：

A.**实物单位**：

- 自然单位：辆、双、头、根、个……
- 度量衡单位：吨、米、克、立方米……
- 双重单位：公里/小时、吨/台（起重机）、吨/（立方米*座*年）……
- 复合单位：吨公里（货运量）、千瓦小时（度）……

B.**价值单位**(货币单位)：

- 货币单位有现行价格和不变价格之分。
- 价值单位使不能直接相加的产品产量过渡到能够加总。

C.**劳动单位**：

- 工时：工人数和劳动时数的乘积。
- 台时：设备台数和开动时数的乘积。

4.2 相对程度的度量

相对指标概述

计划完成相对指标

结构相对指标

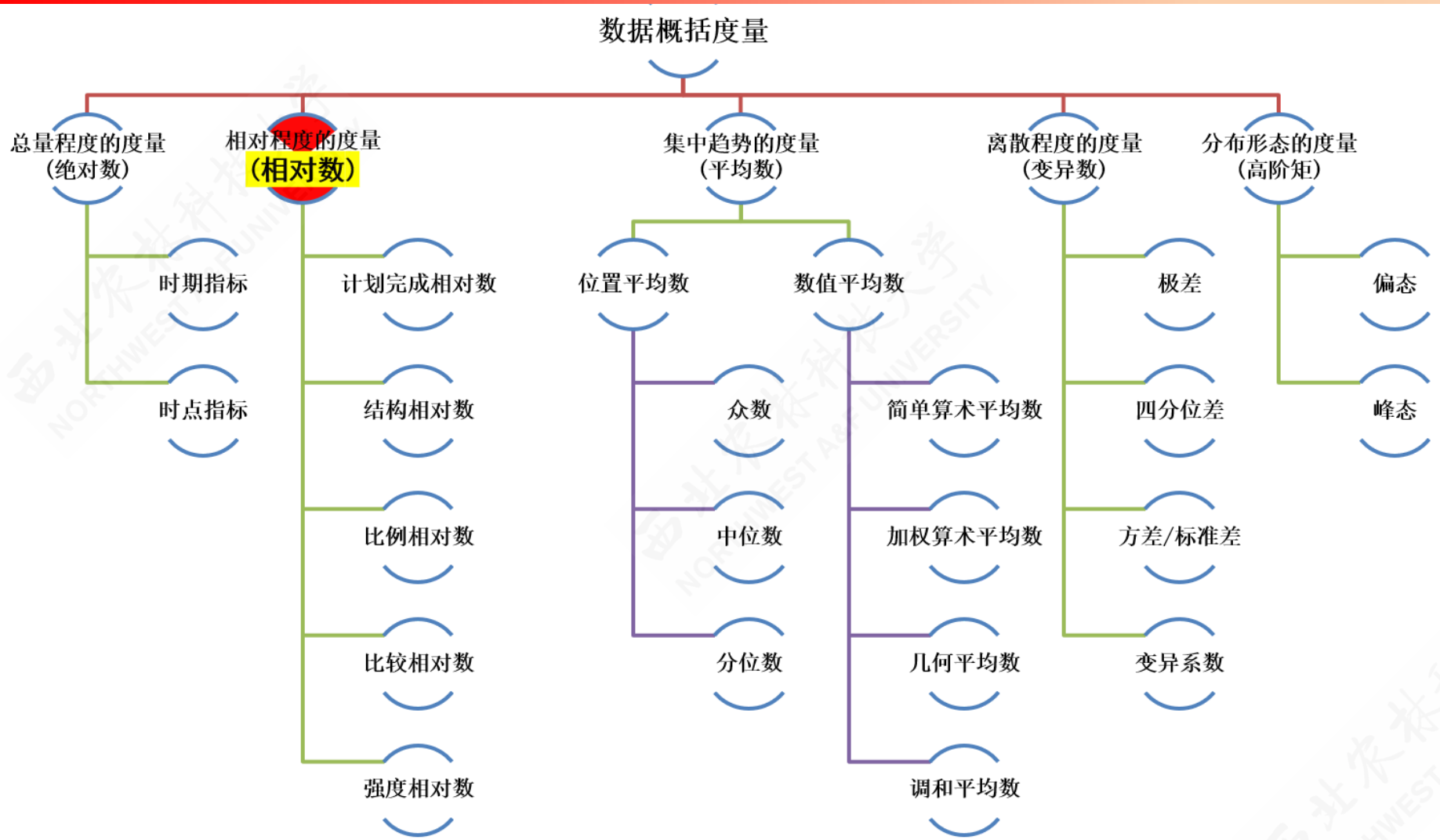
比例相对指标

比较相对指标

强度相对指标

动态相对指标

内容导航


数据概括度量
总量程度的度量
(绝对数)
相对程度的度量
(相对数)
集中趋势的度量
(平均数)
离散程度的度量
(变异数)
分布形态的度量
(高阶矩)
时期指标
时点指标
计划完成相对数
结构相对数
比例相对数
比较相对数
强度相对数
位置平均数
数值平均数
众数
中位数
分位数
简单算术平均数
加权算术平均数
几何平均数
调和平均数
极差
四分位差
方差/标准差
变异系数
偏态
峰态

相对指标概述：概念和作用

相对指标：是两个有联系的绝对指标之比。

> 示例：2009年我国对外贸易进口总额增长率为16.3%。

作用：

- 具体表明社会经济现象之间的比例关系。
- 使一些不能直接对比的事物找出共同比较的基础。
- 便于记忆、易于保密。

相对指标概述：类型

- **计划完成相对指标：**用来检查、监督计划执行情况的相对指标。
- **结构相对指标：**利用分组法，将总体区分为不同性质（即差异）的各部分，以部分数值与总体全部数值对比而得出比重或比率，用以反映总体内部构成状况的相对指标。
- **比例相对指标：**同一总体内不同组成部分的指标数值对比的结果，用来反映总体内部的比例关系。
- **比较相对指标：**将两个同类指标做静态对比得出的相对指标，表明同类现象在不同条件下的数量对比关系。
- **强度相对指标：**是两个不同性质的、但有一定联系的总量指标对比的结果，用来表明现象的强度、密度和普遍程度的相对指标。
- **动态相对指标：**后面专门一章学习。

相对指标概述：表现形式

相对指标的表现形式有两大类：

- 有名数形式：分子分母的单位**不能**化约。
  - 人口密度：人/平方公里
  - 平均每人分摊的粮食产量：千克/人
- 无名数形式：分子分母的单位**可以**化约。
  - 系数或倍数：是将比的基数抽象化为1。例如：固定资产磨损系数、工资等级系数、结构比例系数。
  - 成数：是将比的基数抽象化为10。例如：粮食产量增加一成，即增长1/10。
  - 百分数：是将比的基数抽象化为100。
  - 千分数：是将比的基数抽象化为1000。

相对指标概述：运用原则

相对指标的运用原则：

- 注意二个对比指标的可比性。
- 相对指标要和总量指标结合起来运用。
- 多种相对数结合运用
- 在比较二个相对数时，是否适宜相除再求一个相对数，应视情况而定。若除出来有实际意义，则除；若不宜相除，只宜相减求差数，用百分点表示之。

> 百分点：即百分比中相当于百分之一的单位。

（案例）钢产量：相对指标与总量指标巧妙结合

a.案例说明　b.计算指标　c.计算表1　d.计算表2

案例数据：我国三个时期两个年份的钢产量数据如下：

时期	年份	钢产量(万吨)
A	1949	15.8
A	1950	61
B	1978	3178
B	1979	3448
C	1986	5220
C	1987	5628

（案例）钢产量：相对指标与总量指标巧妙结合

a.案例说明　b.计算指标　c.计算表1　d.计算表2

根据以上数据，我们可以计算出：

$$\text{产量变化}\Delta = Q_{t_1} - Q_{t_0}$$

$$\text{发展速度\%} \quad Speed = 100 * Q_{t_1}/Q_{t_0}$$

$$\text{增长率\%} \quad Ratio = 100 * (Q_{t_1} - Q_{t_0})/Q_{t_0} = 100 * \Delta/Q_{t_0}$$

$$\text{增长1\%的绝对值} = \Delta/Ratio = Q_{t_0}/100$$

（案例）钢产量：相对指标与总量指标巧妙结合

a.案例说明　b.计算指标　c.计算表1　d.计算表2

根据上述指标公式，可以计算得到：

时期	年份	钢产量(万吨)	上1年产量	产量变化	发展速度%	增长率%	增长1%的绝对值
A	1949	15.8					
A	1950	61	15.8	45.2	386.08%	286.08%	0.16
B	1978	3178					
B	1979	3448	3178	270	108.50%	8.50%	31.78
C	1986	5220					
C	1987	5628	5220	408	107.82%	7.82%	52.20

（案例）钢产量：相对指标与总量指标巧妙结合

前述计算表，也可进一步变形为：

vars	A-1949	A-1950	B-1978	B-1979	C-1986	C-1987
钢产量(万吨)	15.8	61	3178	3448	5220	5628
产量变化		45.2		270		408
发展速度%		386.08%		108.50%		107.82%
增长率%		286.08%		8.50%		7.82%
增长1%的绝对值		0.16		31.78		52.2

计划完成相对指标：概念和特征

计划完成相对指标：实际完成数与计划任务数对比的比率。根据分子分母是否属于同一时期，可以分为两类，具体计算公式分别为：

- 计划完成**程度**：分子分母属同一时期。

$$\text{计划完成程度} = \frac{\text{实际完成数}}{\text{计划完成数}} \times 100\%$$

- 计划完成**进度**：分子分母属不同时期。

$$\text{计划完成进度} = \frac{\text{计划初期至某期实际累计完成数}}{\text{全期计划数}} \times 100\%$$

特征：分子分母不能颠倒位置。

计划完成相对指标：任务下达形式

计划完成相对指标的下达形式主要有三种：

- 以**总量指标**下达任务，具体计算公式为：

$$\text{计划完成相对指标} = \frac{\text{实际水平}}{\text{计划水平}} \times 100\%$$

- 以**平均指标**下达任务，具体计算公式为：

$$\text{计划完成相对指标} = \frac{\text{实际平均水平}}{\text{计划平均水平}} \times 100\%$$

- 以**相对指标**下达任务，具体计算公式为：

$$\text{计划完成相对指标} = \frac{\text{实际为基数的百分数}}{\text{计划为基数的百分数}} \times 100\% = \frac{1 \pm \text{实际增减百分数}}{1 \pm \text{计划增减百分数}} \times 100\%$$

（示例）计算计划完成相对指标：以总量指标为基础

问题：设某公司某年计划工业总产值为200万元，实际完成220万元，则计划完成程度为多少？

答案：

（示例）计算计划完成相对指标：以总量指标为基础

问题：设某公司某年计划工业总产值为200万元，实际完成220万元，则计划完成程度为多少？

答案：

$$\text{总产值计划完成相对数} = \frac{220}{200} \times 100\% = 110\%$$

（示例）计算计划完成相对指标：以平均指标为基础

问题：某化肥企业某年每吨化肥计划成本为200元，实际成本为180元，则计划完成程度为多少？

答案：

（示例）计算计划完成相对指标：以平均指标为基础

问题：某化肥企业某年每吨化肥计划成本为200元，实际成本为180元，则计划完成程度为多少？

答案：

$$\text{实际单位成本} - \text{计划单位成本} = 180 - 200 = -20\ (\text{元})$$

计算结果表明该企业化肥单位成本实际比计划降低了10%，平均每吨化肥节约生产费用20元。

$$\text{成本计划完成相对数} = \frac{180}{200} \times 100\% = 90\%$$

（示例）计算计划完成相对指标：以相对指标为基础

问题：某企业生产某产品，上年度实际成本为420元/吨，本年度计划单位成本降低6%，实际降低7.6%，则计划完成程度为多少？

答案1：

（示例）计算计划完成相对指标：以相对指标为基础

问题：某企业生产某产品，上年度实际成本为420元/吨，本年度计划单位成本降低6%，实际降低7.6%，则计划完成程度为多少？

答案1：

$$\text{成本降低率计划完成相对数} = \frac{1-7.6\%}{1-6\%} \times 100\% = 98.29\%$$

（示例）计算计划完成相对指标：以相对指标为基础

问题：某企业生产某产品，上年度实际成本为420元/吨，本年度计划单位成本降低6%，实际降低7.6%，则计划完成程度为多少？

答案1：

$$\text{成本降低率计划完成相对数} = \frac{1-7.6\%}{1-6\%} \times 100\% = 98.29\%$$

答案2：本题也可换算成绝对数计算。

$$\begin{array}{lllll} \text{计划:} & -6\% & \sim 394.8\text{元/吨} & [(1-6\%)\times 420] \\ \text{实际:} & -7.6\% & \sim 388.08\text{元/吨} & [(1-7.6\%)\times 420] \end{array}$$

$$\text{成本降低率计划完成相对数} = \frac{388.08}{394.8} \times 100\% = 98.29\%$$

计划完成相对指标：中长期计划

中长期计划执行情况检查：

- **水平法**：根据计划末期实际达到水平与计划规定末期应达到水平对比，来确定是否完成全期计划。

$$\text{计划完成程度} = \frac{\text{计划末期实际达到水平}}{\text{计划末期应达到水平}} \times 100\%$$

- **累计法**：整个计划期间实际完成的累计数与全期计划数对比，来确定是否完成全期计划。

$$\text{计划完成程度} = \frac{\text{实际全期累计完成数}}{\text{计划全期累计数}} \times 100\%$$

计划完成相对指标：提前完成时间

计算提前完成计划时间

- 对于**水平法**：在整个计划期内，只要连续12个月实际完成数达到计划末期水平，就算完成计划，则往后的时间即为提前完成计划的时间。
- 对于**累计法**：从计划初开始至某一时期止，实际完成累计数达到计划规定的累计数，就算完成计划，而往后的时间即为提前完成计划的时间。

（示例1）中长期计划提前期：水平法

例题：某地区按五年计划规定，最后一年国民生产总值应达到520亿元，实际国民生产总值如下表所示：

第1年	第2年	第3年	第4年	第4年	第5年	第5年	第5年	第5年
全年	全年	全年	上半年	下半年	第1季度	第2季度	第3季度	第4季度
320	340	380	200	220	140	160	170	180

问题：请用水平法计算提前多长时间完成计划任务？

（示例1）中长期计划提前期：水平法

例题：某地区按五年计划规定，最后一年国民生产总值应达到520亿元，实际国民生产总值如下表所示：

第1年	第2年	第3年	第4年	第4年	第5年	第5年	第5年	第5年
全年	全年	全年	上半年	下半年	第1季度	第2季度	第3季度	第4季度
320	340	380	200	220	140	160	170	180

问题：请用水平法计算提前多长时间完成计划任务？

解答：根据水平法，只需要连续一个**自然年**（12个月）达到年计划产值，就算完成任务*。通过观察和计算可以发现：第4年下半年+第5年第1季度+第5年第2季度$=(220+140+160)=520$。因此提前了两个季度完成520亿元的年度计划任务。

* 注意潜藏着一个线性递增产能的假设。

（示例2）中长期计划提前期：水平法

1)例题提问：

某产品计划年度任务产量为56万吨，实际第五年产量63万吨，现假定第4年、第5年各月完成情况如下：

序号	年份	月份	产量
1	第4年	1	3.5
2	第4年	2	3.5
3	第4年	3	4
4	第4年	4	3.8
5	第4年	5	4
6	第4年	6	3.8

Showing 1 to 6 of 24 entries

Previous 1 2 3 4 Next

问题：请用水平法计算提前多少天完成计划任务？

（示例2）中长期计划提前期：水平法

1)例题提问：

2)解答思路：

根据水平法，只需要连续一个**自然年**（12个月）达到年计划产量，就算完成任务产量56万吨*。容易计算得到，12个月滚动累加的结果如下：

序号	年份	月份	产量	滚动累加
1	第4年	1	3.5	
2	第4年	2	3.5	
3	第4年	3	4	
4	第4年	4	3.8	
5	第4年	5	4	
6	第4年	6	3.8	

Showing 1 to 6 of 24 entries

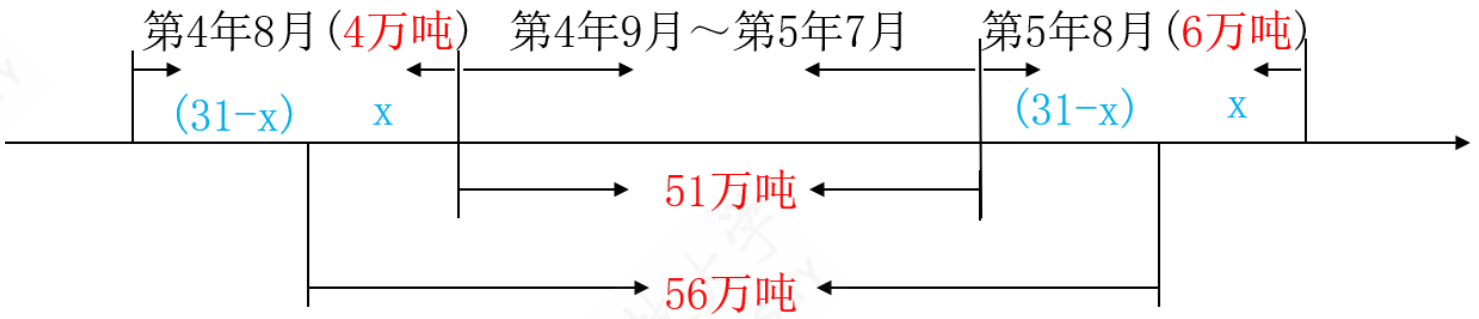
Previous 1 2 3 4 Next

（示例2）中长期计划提前期：水平法

1)例题提问：

2)解答思路：

3)分析求解：



根据上述滚动12月累加，可以发现正好生产56万吨的时间应是：“第4年8月第31-X天到第5年8月第(31-X)天”的连续12个月。如上图所示。

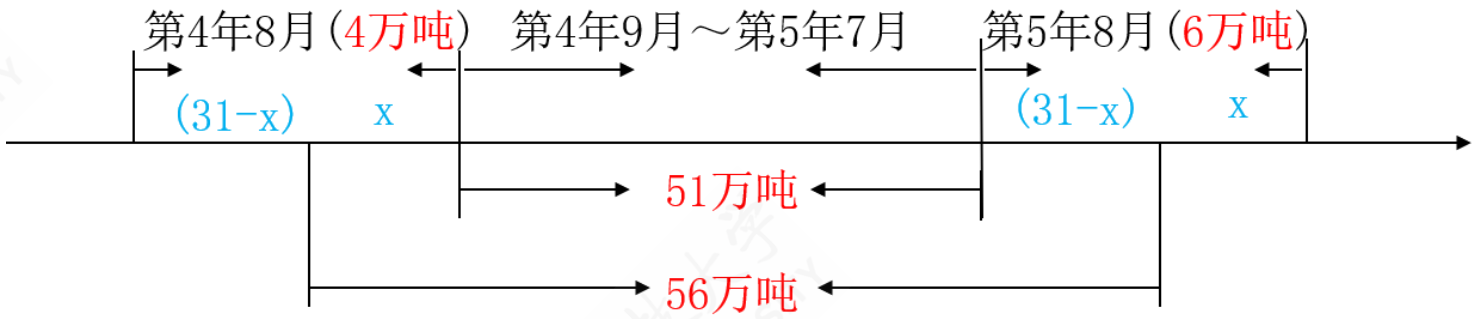
（示例2）中长期计划提前期：水平法

1)例题提问：

2)解答思路：

3)分析求解：

4)计算结果：



假定月内产量是均匀分布的，则有如下等式：

$$\frac{4}{31}X + 51 + \frac{6}{31}(31 - X) = 56$$

$$X = 15.5$$

也即：提前4个月又15天半完成五年计划的年度目标计划任务。

（示例3）中长期计划提前期：累计法

例题：某地区按五年计划规定，固定资产投入额为30亿元，实际投入情况如下表所示：

第1年	第2年	第3年	第4年	第5年
6	7	8	9	6

问题：请用累计法计算提前多长时间完成计划任务？

解答：根据累计法，从期初开始累计达到计划投入额30亿元，即为达成目标，剩余日期即为提前期。通过观察和计算可以发现：第1年至第4年实际投入额累加=$(6+7+8+9)=30$。因此完成计划时间为**第4年**，也即意味着**提前1年**完成五年计划规定任务。

结构相对指标：概念和特征

结构相对指标：反映某个总体内，有机构成的组成部分在系统中的地位，具体通过同一总体中部分数值与总体数值之比来衡量。

指标特征：

- 子分母不能颠倒
- 结构相对指标直接相加之和等于1

计算公式：

$$\text{结构相对指标} = \frac{\text{总体部分数值}}{\text{总体全部数值}} \times 100\%$$

结构相对指标：作用

结构相对指标的作用主要体现在：

- 可以反映总体内部结构的特征
- 不同时期相对数的比较，可以看出变化过程及趋势
- 能反映对忍耐力、物力、财力的利用程度及经营效果的好坏
- 结构相对数在平均数计算中的应用：用于分析加权算术平均数指标的大小极其变动的原因*。

注释：* 以后**第14章 指数**中会详细介绍。

（示例）结构相对指标：企业实收资本

表 3-3　企业实收资本构成(2004 年 12 月 31 日)

	实收资本额(万亿元)	比重(%)
国家投入	8.7	48.1
集体投入	1.4	7.9
个人投入	5.1	28.0
港澳台投入	1.3	7.3
外商投入	1.6	8.7
合　　计	18.2	100.0

资料来源：根据 2005 年 12 月发布的第一次全国经济普查数据。

（示例）结构相对指标：国内生产总值构成

表 3-4　2004—2008 年我国国内生产总值构成(%)

	2004 年	2005 年	2006 年	2007 年	2008 年
第一产业	13.4	12.2	11.3	11.1	11.3
第二产业	46.2	47.7	48.7	48.5	48.6
第三产业	40.4	40.1	40.0	40.4	40.1

资料来源：《中国统计摘要》，中国统计出版社 2009 年版，第 21 页。

比例相对指标：概念和特征

比例相对指标：反映某个总体内，某一组成部分与其他组成部分的地位对比关系，具体通过同一总体中各组成部分之间数值之比来衡量。

指标特征：分子分母可以颠倒

计算公式：

$$\text{比例相对指标} = \frac{\text{总体某一部分数值}}{\text{总体中另一部分数值}} \times 100\%$$

比例相对指标：类型与形式

比例相对指标有两类表现形式：

- **两两作比**：抽象基数为1、10、100或1000。

> 示例：我国2000年第五次人口普查结果，男女性别比例为106.74:100，这说明以女性为100，男性人口是女性人口数的106.74倍。2009年我国出生人口性别比为119.45，比2008年下降了1.11。

- **多部作比**：各部分的百分数连比得比例相对数。

> 示例：2009年上海GDP抽象化为100，第一产业、第二产业、第三产业的比例为：0.7：39.9：59.4

（示例）比例相对指标

示例：某学院两个学科的人数统计表如下：

学科	人数	比例
经济学	781	41
管理学	1108	59
合计	1889	100

计算比例相对指标：

- 此处，我们假定两个学科的地位是平等无差异的的。
- 学科人数比（经济学=100）：$R_{r1} = \frac{1108}{781} \times 100\% = 142.1$
- 学科人数比（管理学=100）：$R_{r2} = \frac{781}{1108} \times 100\% = 70.4$

比较相对指标：概念和特征

比较相对指标：反映同类现象不同条件下（不同时间/空间之间）的指标对比。

计算公式：

$$\text{比较相对指标} = \frac{\text{某一条件下某类指标数值}}{\text{另一条件下同类指标数值}} \times 100\%$$

指标特征：

- 比较基数（标准）是一般对象，分子与分母的位置可以互换。
- 比较基数（标准）具有典型化，分子与分母的位置不能互换。

> 例如：单位产品的质量、成本、单耗等技术经济指标。

（示例）比较相对指标：两个示例

)可互换：

示例1：2015年甲、乙两地国民生产总值分别为50亿元和60亿元。请计算比较相对指标，对比分析两地情况？

计算比较相对指标：

- 此处，假定以甲乙两地的地位是无差异的，则分子分母可互换。
- 甲地国民收入是乙地的1.2倍：$R_{c1}=\frac{60}{50}=1.2$。
- 乙地国民收入是甲地的83.3%：$R_{c1}=\frac{50}{60}\times 100\%=83.3\%$。

（示例）比较相对指标：两个示例

1)可互换：

2)不宜换：

示例2：某年有甲、乙两企业同时生产一种性能相同的产品，甲企业工人劳动生产率为19,307元，乙企业为27,994元。请计算比较相对指标，对比分析两企业情况？

计算比较相对指标：

- 此处，假定以表现“优秀”的企业为参考系，则分子分母不宜互换。
- 两企业劳动生产率比较相对数：$R_{c2} = \frac{19307}{27994} \times 100\% = 69.0\%$。
- 表明甲企业劳动生产率比乙企业低31%。

强度相对指标：概念和作用

强度相对指标：两个性质不同但又相互联系的总量指标的对比。

计算公式：

$$\text{强度相对指标} = \frac{\text{某一总体指标数值}}{\text{另一有联系的总体指标数值}} \times 100\%$$

指标作用：

- 说明一个国家、地区、部门的经济实力或为社会服务的能力。
- 反映和考核社会经济效益。如流通费用率、资金利润率等。
- 为贬值计划和长远规划提供参考依据。

强度相对指标：表现形式

强度相对数的主要有两种表现形式：

- **有名数形式**：一般用**复名数**表示，如人/平方公里、部/百人
- **无名数形式**：一般用**百分**（%）或**千分数**（‰）表示，如流通费用率（%）、人口增长率（‰）。

有些强度相对指标有**正指标/逆指标**两种计算方法。

- 分子分母可以交换，含义相同，只是表达习惯上的差异。
- 与术语词义一致的、或广为使用的则称为**“正指标”**，反之则称为**“逆指标”**。

（示例）计算强度相对指标

示例：某城市人口100万人，有零售商业机构5000个。请计算强度相对指标，分析商业网点密度情况。

解答：可以分别计算出商业网店密度的正指标和逆指标。

（示例）计算强度相对指标

示例：某城市人口100万人，有零售商业机构5000个。请计算强度相对指标，分析商业网点密度情况。

解答：可以分别计算出商业网店密度的正指标和逆指标。

- 商业网店密度的**正指标：** $R_{d1}=\frac{5000个}{1000000人}=5$（个/千人）
- 商业网店密度的**逆指标：** $R_{d1}=\frac{1000000人}{5000个}=200$（人/个）

动态相对指标：概念和特征

动态相对指标：同类现象同一空间不同时间指标的对比。

计算公式：其中一个指标为“发展水平”。

$$\text{动态相对指标} = \frac{\text{某一现象报告期数值}}{\text{同一现象基期数值}} \times 100\%$$

指标特征：分子分母不能颠倒。

（示例）计算动态相对指标

案例：某地2014年和2015年国民生产总值分别为56 亿元和60亿元。请计算动态相对指标，分析其经济发展状况。

解答：我们可以计算其国民生产总值的发展水平相对指标。

（示例）计算动态相对指标

案例：某地2014年和2015年国民生产总值分别为56 亿元和60亿元。请计算动态相对指标，分析其经济发展状况。

解答：我们可以计算其国民生产总值的发展水平相对指标。

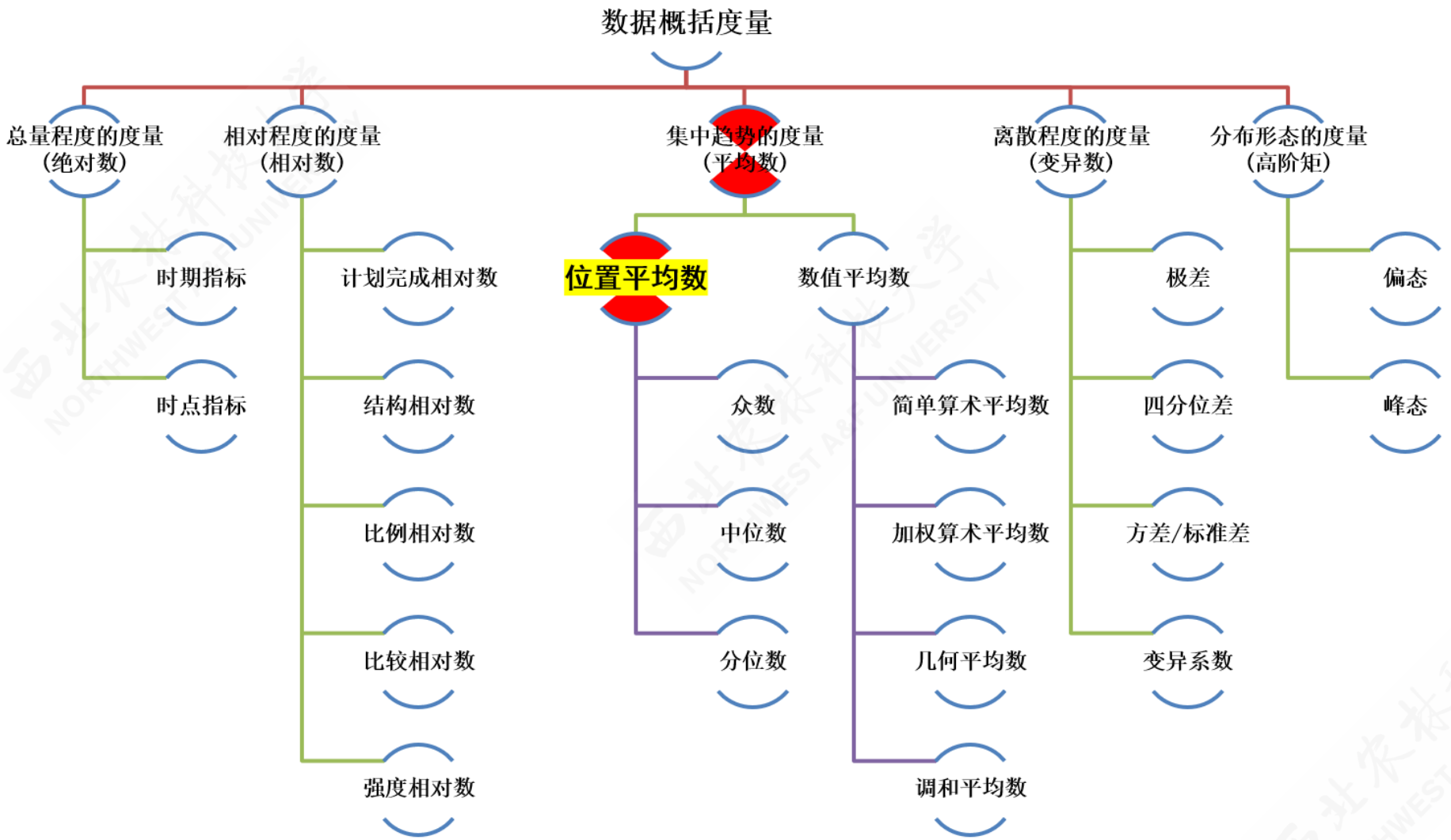
$$R_p = \frac{60}{56} \times 100\% = 107\%$$

4.3 集中趋势的度量

位置平均数

数值平均数

内容导航

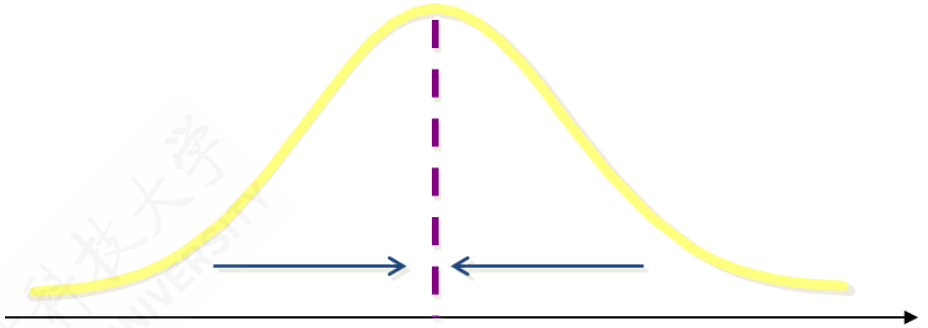

数据概括度量
总量程度的度量
(绝对数)
相对程度的度量
(相对数)
集中趋势的度量
(平均数)
离散程度的度量
(变异数)
分布形态的度量
(高阶矩)
时期指标
时点指标
计划完成相对数
结构相对数
比例相对数
比较相对数
强度相对数
位置平均数
数值平均数
众数
中位数
分位数
简单算术平均数
加权算术平均数
几何平均数
调和平均数
极差
四分位差
方差/标准差
变异系数
偏态
峰态

集中趋势：概述

集中趋势（central tendency）：一组数据向其中心值靠拢的倾向和程度。

内涵：

- 测度集中趋势就是寻找数据水平的代表值或中心值。
- 不同类型的数据用不同的集中趋势测度值。
- 低层次数据的测度值适用于高层次的测量数据*，但高层次数据的测度值并不适用于低层次的测量数据。



集中趋势示意图

注释：* 复习数据的四个层次：名义尺度（nominal）、顺序尺度（ordinal）、区间尺度（interval）、比率尺度（ratio）。

众数：概念和特征

众数（Mode）：一组数据中出现次数最多的变量值，一般记为 M_o。

众数的特征：

- 适合于数据量较多时使用。
- 不受极端值的影响。
- 一组数据可能没有众数或有几个众数。
- 主要用于分类数据，也可用于顺序数据和数值型数据。

（示例）众数的表现形式：河流长度

0)源数据：

案例说明：对三个地区各6条河流的长度进行测量，得到如下的数据表：

3个地区的河流及长度（100公里）

river	area1	area2	area3
R1	10	6	25
R2	5	5	28
R3	9	9	28
R4	12	8	36
R5	6	5	42
R6	8	5	42

（示例）众数的表现形式：河流长度

0)源数据：

1)无众数：

a.频次表：对于地区1（area1）的6条河流，我们可以统计得到不同长度（length）下的河流数（n），得到如下的频次数据表：

地区1不同长度的河流数量

area	length	n
area1	5	1
area1	6	1
area1	8	1
area1	9	1
area1	10	1
area1	12	1

b.示意图：因为每条河流都有不同的长度，出现频次全部等于1。因此，地区1的**河流长度无众数。**

（示例）众数的表现形式：河流长度

0)源数据：

1)无众数：

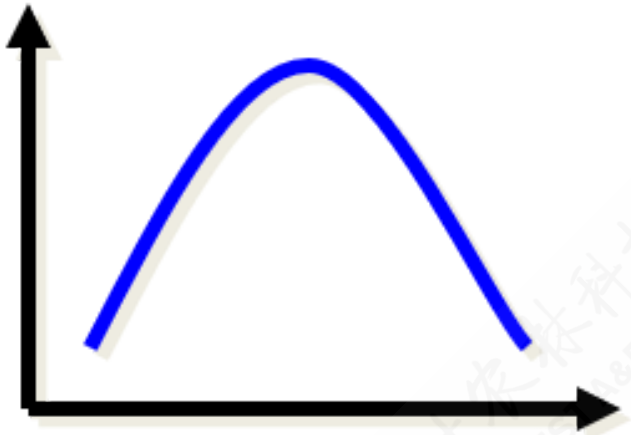
2)单众数：

a.频次表：对于地区2（area2）的6条河流，我们可以统计得到不同长度（length）下的河流数（n），得到如下的频次数据表：

地区2不同长度的河流数量

area	length	n
area2	5	3
area2	6	1
area2	8	1
area2	9	1

b.示意图：因为长度为5（百km）出现频次最多（3次）。因此，地区2的**河流长度有1个众数**，且 $M_{o1}=5$。



（示例）众数的表现形式：河流长度

0)源数据：

1)无众数：

2)单众数：

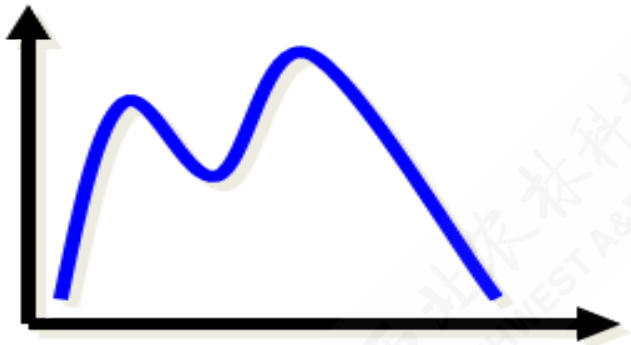
3)多众数：

a.频次表：对于地区3（area3）的6条河流，我们可以统计得到不同长度（length）下的河流数（n），得到如下的频次数据表：

地区3不同长度的河流数量

area	length	n
area3	25	1
area3	28	2
area3	36	1
area3	42	2

b.示意图：因为长度为28（百km）和42（百km）都出现频次最多（2次）。因此，地区3的**河流长度有2个众数**，且 $M_{o1}=28; M_{o1}=42$。示意简图如下[1]：



众数计算：概览

A.对于**单项式分配数列**：观察法，识别频次最多的组。

B.对于**组距式分配数列**：由最多次数来确定众数所在组；利用**比例插值法**推算众数的近似值。

- 下限插值公式：

$$M_0 = X_L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot d$$

- 上限插值公式：

$$M_0 = X_U - \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot d$$

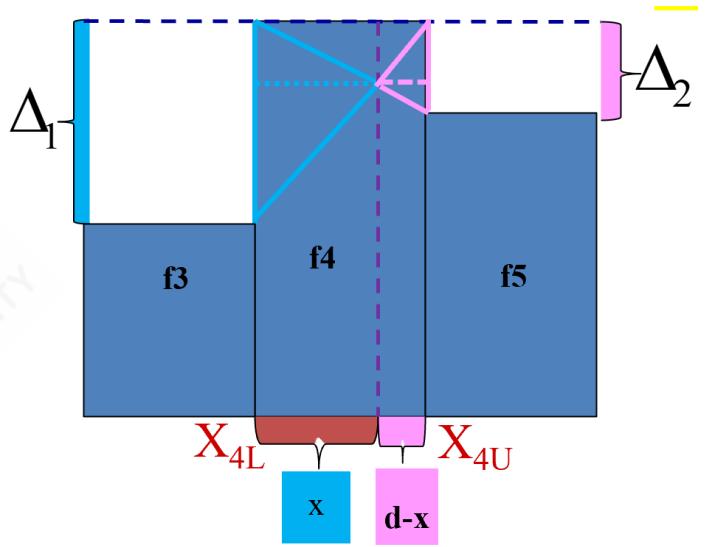
其中：

- X_L表示组下限（Lower limits）； X_U表示组上限（Upper limits）；
- Δ_1表示众数组与**前一组**的频次之差；Δ_2表示众数组与**后一组**的频次之差；
- d表示众数组的**组距**（width）。

众数计算：组距式数列

0)图形示意：

分组	次数
X_{1L}-X_{1U}	f1
X_{2L}-X_{2U}	f2
X_{3L}-X_{3U}	f3
X_{4L}-X_{4U}	f4
X_{5L}-X_{5U}	f5



- X_L表示组下限（Lower limits）；X_U表示组上限（Upper limits）；
- d表示众数组的**组距**（width）；x表示待求解的组距部分。

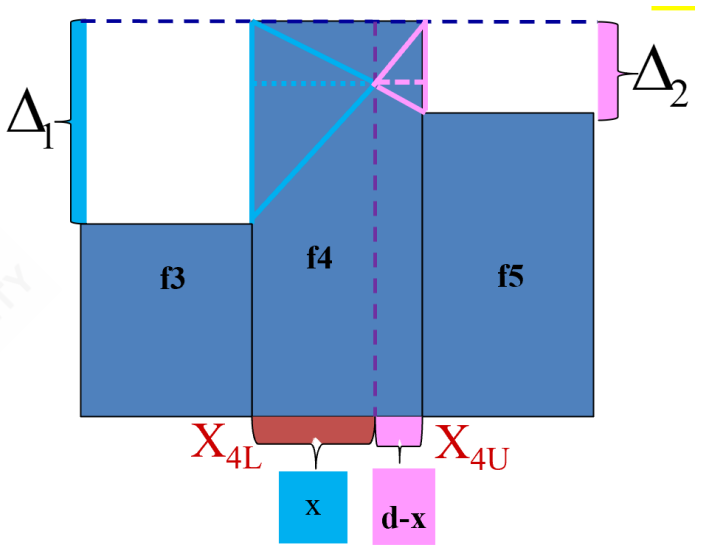
- Δ_1表示众数组与**前一组**的频次之差；Δ_2表示众数组与**后一组**的频次之差；

众数计算：组距式数列

0)图形示意：

1)上限公式：

分组	次数
X_{1L}-X_{1U}	f1
X_{2L}-X_{2U}	f2
X_{3L}-X_{3U}	f3
X_{4L}-X_{4U}	f4
X_{5L}-X_{5U}	f5



给定上限值，则采用上限插值公式：

$$\Rightarrow \frac{x}{d-x}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \Rightarrow x=\frac{\Delta_1 \cdot d}{\Delta_1+\Delta_2} \Rightarrow \mathrm{M}_0=X_{4U}-(d-x)=X_{4U}-\frac{\Delta_2 \cdot d}{\Delta_1+\Delta_2}$$

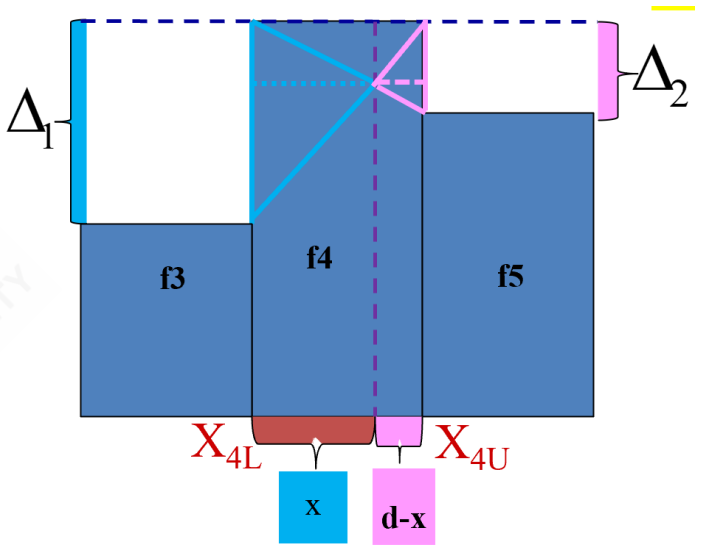
众数计算：组距式数列

0)图形示意：

1)上限公式：

2)下限公式：

分组	次数
X_{1L}-X_{1U}	f1
X_{2L}-X_{2U}	f2
X_{3L}-X_{3U}	f3
X_{4L}-X_{4U}	f4
X_{5L}-X_{5U}	f5



给定下限值，则采用**下限插值公式**：

$$\Rightarrow \frac{x}{d-x}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \Rightarrow x=\frac{\Delta_1 \cdot d}{\Delta_1+\Delta_2} \Rightarrow \mathrm{M}_0=\mathrm{X}_{4L}+\frac{\Delta_1 \cdot d}{\Delta_1+\Delta_2}$$

（示例）：众数计算（单项式数列）

案例说明：某饮料便利店一天内不同品牌饮料的销售情况如下表所示。请计算众数是什么？

不同品牌饮料的购买分布

brand	n	percent
果汁	6	12%
其他	8	16%
矿泉水	10	20%
绿茶	11	22%
碳酸饮料	15	30%
Total	50	100%

（示例）：众数计算（单项式数列）

案例说明：某饮料便利店一天内不同品牌饮料的销售情况如下表所示。请计算众数是什么？

不同品牌饮料的购买分布

brand	n	percent
果汁	6	12%
其他	8	16%
矿泉水	10	20%
绿茶	11	22%
碳酸饮料	15	30%
Total	50	100%

解答：这里的变量为“饮料品牌”，这是个**分类变量**（nominal），不同类型的饮料就是变量值。所调查的50人中，购买碳酸饮料的人数最多（15人），占总被调查人数的30%，因此众数为“可口可乐”这一品牌，即：M_0 =碳酸饮料。

（示例）：众数计算（单项式数列）

案例说明：甲城市300家庭对住房状况进行评价，数据统计情况如下表所示。请计算众数是什么？

甲城市家庭对住房状况评价分布

satisfication	n	percent
非常不满意	24	8%
不满意	108	36%
一般	93	31%
满意	45	15%
非常满意	30	10%
Total	300	100%

（示例）：众数计算（单项式数列）

案例说明：甲城市300家庭对住房状况进行评价，数据统计情况如下表所示。请计算众数是什么？

甲城市家庭对住房状况评价分布

satisfication	n	percent
非常不满意	24	8%
不满意	108	36%
一般	93	31%
满意	45	15%
非常满意	30	10%
Total	300	100%

解答：这里的变量为“住房状况评价”，这是个**顺序变量**（orderial），不同类型的饮料就是变量值。所调查的300人中，甲城市中对住房表示不满意的户数最多（108户），因此众数为“不满意”这一类别，即：M_0 =碳酸饮料。

（示例）：众数计算（组距式数列）

案例说明：200人的收入水平调查分组数据见右表，请计算收入的众数是多少？

解题思路：先观察众数在第三组（“1500-2000”）。再利用插值公式计算。

收入水平	人数
1000元以下	20
1000-1500元	37
1500-2000元	**70**
2000-2500元	43
2500元以上	30
合计	200

（示例）：众数计算（组距式数列）

案例说明：200人的收入水平调查分组数据见右表，请计算收入的众数是多少？

解题思路：先观察众数在第三组（“1500-2000”）。再利用插值公式计算。

收入水平	人数
1000元以下	20
1000-1500元	37
1500-2000元	**70**
2000-2500元	43
2500元以上	30
合计	200

下限公式: $M_o = 1500 + \frac{70-37}{(70-37)+(70-43)} \times 500 = 1775(\text{元})$

上限公式: $M_o = 2000 - \frac{70-43}{(70-37)+(70-43)} \times 500 = 1775(\text{元})$

众数特征：总结

下面对众数及其计算做一个小结：

- 众数是一个位置平均数，它只考虑总体分布中最频繁出现的变量值，而不受各单位标志值的影响，从而增强了对变量数列一般水平的代表性。不受极端值和开口组数列的影响。
- 众数是一个不容易确定的平均指标，当分布数列没有明显的集中趋势而趋均匀分布时，则无众数可言；当变量数列是不等距分组时，众数的位置也不好确定。

在组距式数列的**插值近似计算**中，众数的确定受相邻两个组频次的影响。

- 若 $f_{m-1} = f_{m+1}$，则众数取值等于众数组的组中值。
- 若 $f_{m-1} < f_{m+1}$，则众数取值大于众数组的组中值，从而接近于组上限值。
- 若 $f_{m-1} > f_{m+1}$，则众数取值小于众数组的组中值，从而接近于组下限值。

中位数：概念和特征

中位数（median）：排序后处于中间位置上的变量值，一般记为 M_e。

中位数的特征：

- 不受极端值的影响
- 主要用于顺序数据，也可用数值型数据，但不能用于分类数据。
- 各变量值与中位数的离差绝对值之和最小，即：

$$\sum_{i=1}^{n}|X_i - M_{\mathrm{e}}| = \min$$

中位数计算：概览

情形1：未分组资料确定中位数；

> a.先排序。b.再确定中位数所在位置。c.再确定中位数。

情形2：分组资料确定中位数；

- 情形2-1：**单项式**分组数列计算中位数数

> a.计算累积百分比，确定中位数所在组。b.确定中位数。

- 情形2-2：**组距式**分组数列计算中位数数

> a.计算累积百分比，确定中位数所在组。b.（利用插值公式近似）确定中位数。

中位数计算：未分组资料

第一步：中位数的位置 p的确定。

$$p=\begin{cases}\frac{n+1}{2} & (n\text{为奇数})\\ \frac{n}{2},\frac{n}{2}+1 & (n\text{为偶数})\end{cases}$$

第二步：数值的确定。

$$M_e=\begin{cases}X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & (n\text{为奇数})\\ \frac{1}{2}\left(X_{\left(\frac{n}{2}\right)}+X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right) & (n\text{为偶数})\end{cases}$$

（示例）：未分组数据计算中位数

案例说明：有7名工人生成同种产品，日产量分别为：

```
W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7
10 21 12 15 14 19 17
```

解题过程：我们注意到数据样本量 $n=7$，为奇数。

（示例）：未分组数据计算中位数

案例说明：有7名工人生成同种产品，日产量分别为：

```
W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7
10 21 12 15 14 19 17
```

解题过程：我们注意到数据样本量 $n=7$，为奇数。

- 对原始数据进行排序（由小到大）：

```
W1 W3 W5 W4 W7 W6 W2
10 12 14 15 17 19 21
```

- 确定中位数的位置 $p=\frac{7+1}{2}=4$。
- 因此得到中位数为 $m_e=15$（件）。

（示例）：未分组数据计算中位数

案例说明：继续前面案例数据，假设增加另1名工人的日产量数据：

```
W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8
22 10 21 12 15 14 19 17
```

解题过程：我们注意到数据样本量 $n=8$，为偶数。

（示例）：未分组数据计算中位数

案例说明：继续前面案例数据，假设增加另1名工人的日产量数据：

```
W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8
22 10 21 12 15 14 19 17
```

解题过程：我们注意到数据样本量 $n=8$，为偶数。

- 对原始数据进行排序（由小到大）：

```
W2 W4 W6 W5 W8 W7 W3 W1
10 12 14 15 17 19 21 22
```

- 确定中位数的位置 $p=\frac{8+1}{2}=4.5$。
- 因此得到中位数为 $m_e=\frac{15+17}{2}$ 16（件）。

中位数计算：单项式分组数列

主要计算步骤：

- 第一步：先按组顺序，计算累计分布次数（较大制或较小制）。
- 第二步：再确定中位数所在的位置：$p=\frac{\sum f_i}{2}$。
- 第三步：根据计算的位置，找到该位置所在组，并确定中位数 M_e。

（示例）：单项式数列计算中位数

1)案例数据：

案例说明：甲城市300家庭对住房状况进行评价，评价（satisfication）采用五分制里克特量表，人数分布的统计情况如下左表所示。请计算中位数是什么？

satisfication	n
非常不满意	24
不满意	108
一般	93
满意	45
非常满意	30
Total	**300**

（示例）：单项式数列计算中位数

1)案例数据：

2)分析过程：

较小累积频次

satisfication	n	cumsum
非常不满意	24	24
不满意	108	132
一般	93	225
满意	45	270
非常满意	30	300
Total	**300**	

解题思路：

- 首先计算较小累计频数（cumsum *）（见左）。
- 然后计算中位数的位置 $p = \frac{300+1}{2} = 150.5$
- 根据累计频数观察得到中位数为： M_e =**“一般”**。

思考：* 大家可以练习使用较大制方法累计频次。

（示例）：单项式数列计算中位数

1)案例数据：

案例说明：某工厂共有105个工人，全体工人的日产量（x，件/日）经过分组统计后（$G1 \sim G6$），各组工人人数（n）的数据如下表所示。请计算中位数是什么？

group	X	n
G1	5	8
G2	6	12
G3	7	19
G4	8	35
G5	9	25
G6	10	6
Total		**105**

（示例）：单项式数列计算中位数

1)案例数据：

2)分析过程：

较小累积频次

group	X	n	cumsum
G1	5	8	8
G2	6	12	20
G3	7	19	39
G4	**8**	**35**	**74**
G5	9	25	99
G6	10	6	105
Total		**105**	

解题思路：

- 首先计算并得到较小累计频数（cumsum*）（见左）。
- 然后计算中位数的位置 $p=\frac{(\sum f_i+1)}{2}=\frac{105+1}{2}=53$，根据累计频数观察得到中位数位置为 $p=$第4组（日产量=8）。
- 根据中位数所在位置，得到中位数为：$M_e=8$（件）。

思考：* 大家可以练习使用较大制方法累计频次。

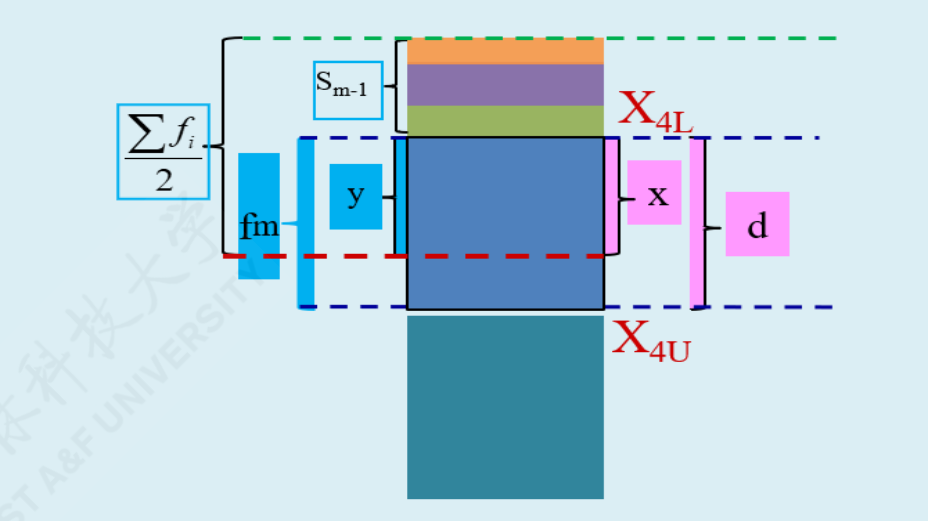
中位数计算：组距式分组数列

主要计算步骤：

- 第一步：先按组顺序，计算累计分布次数（较大制或较小制）。
- 第二步：再确定中位数所在的位置：$p=\frac{\sum f_i}{2}$。
- 第三步：根据计算的位置，找到该位置所在组，初步确定中位数 M_{e1}。
- 第四步：利用合适的**插值公式**，近似计算得到更为“精确”的中位数数值 M_{e2}。

（演示）中位数计算：较小制下限插值公式

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1	Min1	
X_{2L}-X_{2U}	f2	Min2	
X_{3L}-X_{3U}	f3	Min3	
X_{4L}-X_{4U}	**f4**	**Min4**	
X_{5L}-X_{5U}	f5	Min5	
合计	$\sum f_i$	-	

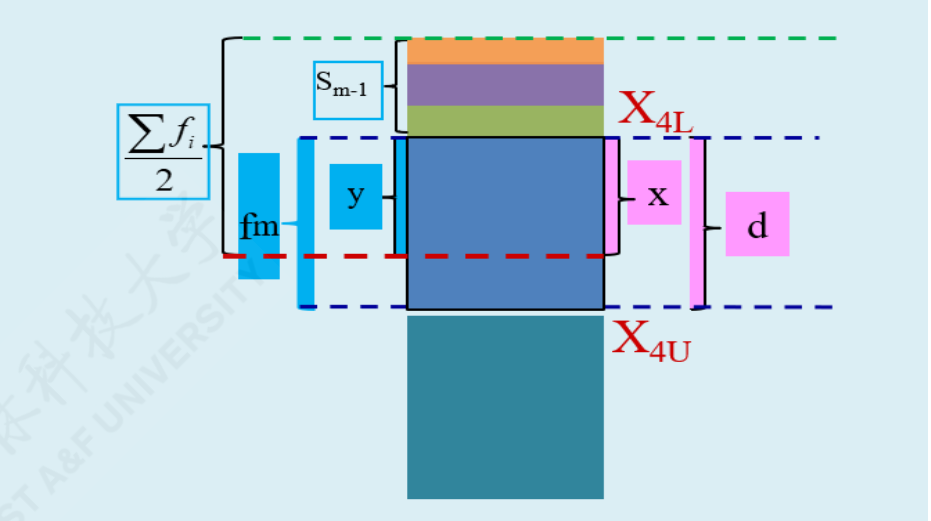


较小制且给定下限值时的相关定义：

- X_L表示组下限（Lower limits）； X_U表示组上限（Upper limits）。
- d表示众数组的**组距**（width）； x表示待求解的组距部分。
- f_m表示中位数组的频次，S_{m-1}表示中位数所在组的**前一组的较小累计频次**； y表示与 x 宽度相对应频次。

（演示）中位数计算：较小制下限插值公式

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1	Min1	
X_{2L}-X_{2U}	f2	Min2	
X_{3L}-X_{3U}	f3	Min3	
X_{4L}-X_{4U}	**f4**	**Min4**	
X_{5L}-X_{5U}	f5	Min5	
合计	$\sum f_i$	-	



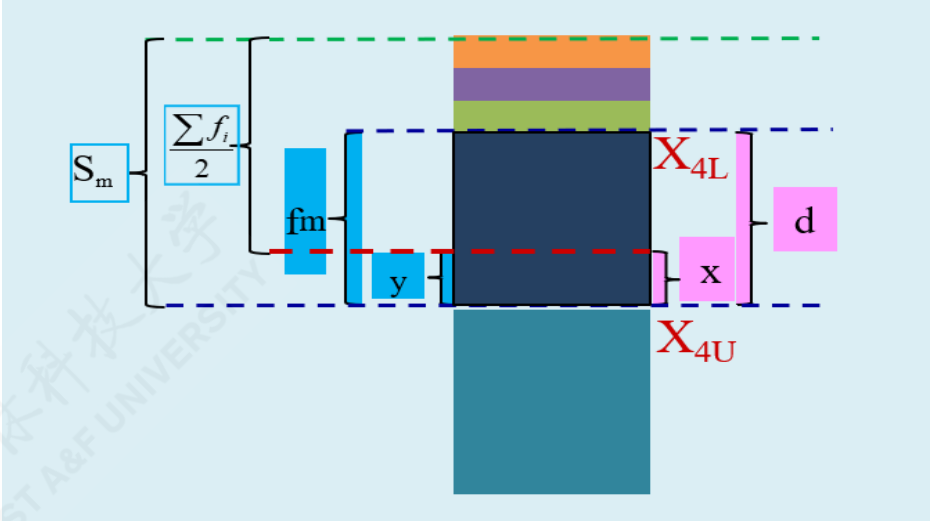
较小制给定下限值时，则采用**较小制下限公式** $(Min, Lower)$：

$$\frac{x}{d} = \frac{(\sum f_i/2 - S_{m-1})}{f_m} \quad \Rightarrow \quad M_{eL} = X_L + x$$

$$M_{eL} = X_L + \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{m-1}}{f_m} \cdot d$$

（演示）中位数计算：较小制上限插值公式

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1	Min1	
X_{2L}-X_{2U}	f2	Min2	
X_{3L}-X_{3U}	f3	Min3	
X_{4L}-X_{4U}	**f4**	**Min4**	
X_{5L}-X_{5U}	f5	Min5	
合计	$\sum f_i$	-	

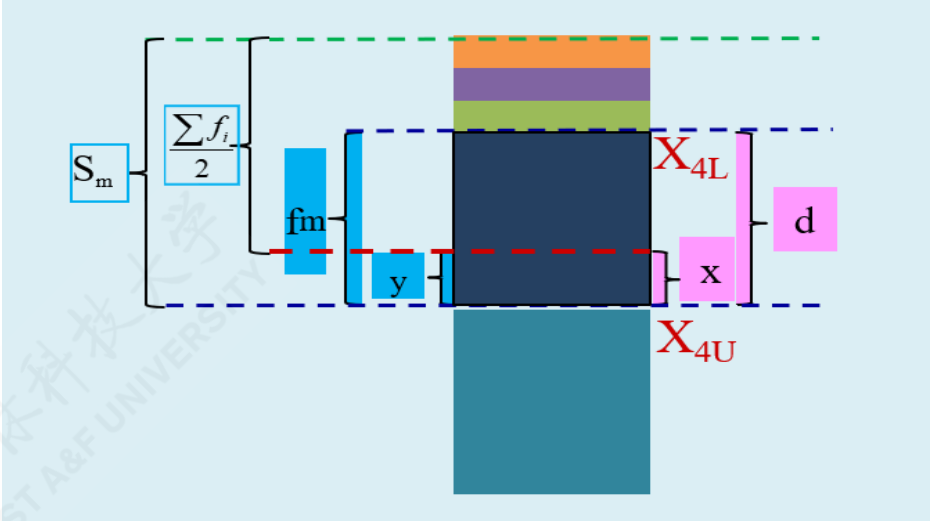


较小制且给定上限值时的相关定义：

- X_L表示组下限（Lower limits）； X_U表示组上限（Upper limits）。
- d表示众数组的**组距**（width）； x表示待求解的组距部分。
- f_m表示中位数组的频次，S_m表示中位数所在组的**较小累计频次**； y表示与 x宽度相对应频次。

（演示）中位数计算：较小制上限插值公式

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1	Min1	
X_{2L}-X_{2U}	f2	Min2	
X_{3L}-X_{3U}	f3	Min3	
X_{4L}-X_{4U}	**f4**	**Min4**	
X_{5L}-X_{5U}	f5	Min5	
合计	$\sum f_i$	-	



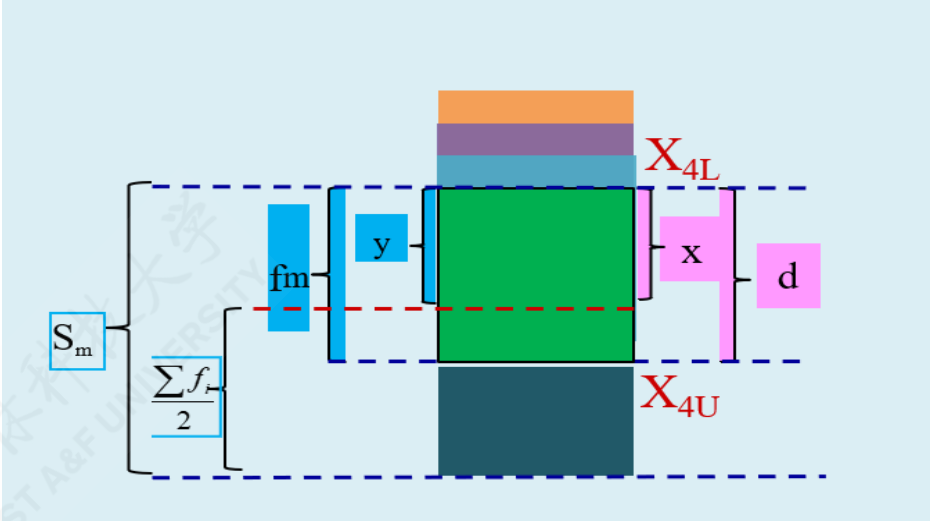
较小制给定下限值时，则采用**较小制上限公式** $(Min, Upper)$：

$$\frac{x}{d} = \frac{(S_m - \sum f_i/2)}{f_m} \quad \Rightarrow \quad M_{eU} = X_U - x$$

$$M_{eU} = X_U - \frac{S_m - \frac{\sum f}{2}}{f_m} \cdot d$$

（演示）中位数计算：较大制下限插值公式

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1		Max1
X_{2L}-X_{2U}	f2		Max2
X_{3L}-X_{3U}	f3		Max3
X_{4L}-X_{4U}	**f4**		**Max4**
X_{5L}-X_{5U}	f5		Max5
合计	$\sum f_i$		-

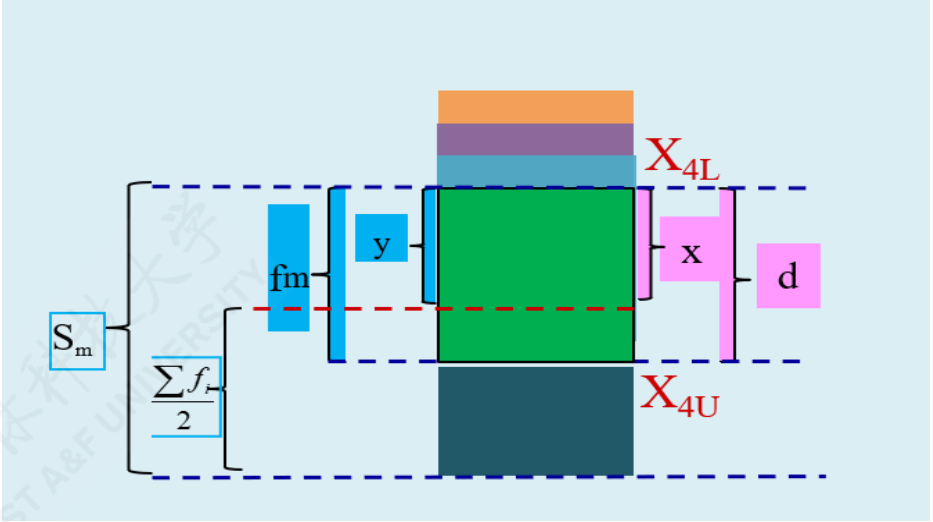


较大制且给定下限值时的相关定义：

- X_L表示组下限（Lower limits）； X_U表示组上限（Upper limits）。
- d表示众数组的**组距**（width）； x表示待求解的组距部分。
- f_m表示中位数组的频次，S_m表示中位数所在组的**较大累计频次**； y表示与 x宽度相对应频次。

（演示）中位数计算：较大制下限插值公式

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1		Max1
X_{2L}-X_{2U}	f2		Max2
X_{3L}-X_{3U}	f3		Max3
X_{4L}-X_{4U}	**f4**		**Max4**
X_{5L}-X_{5U}	f5		Max5
合计	$\sum f_i$		-



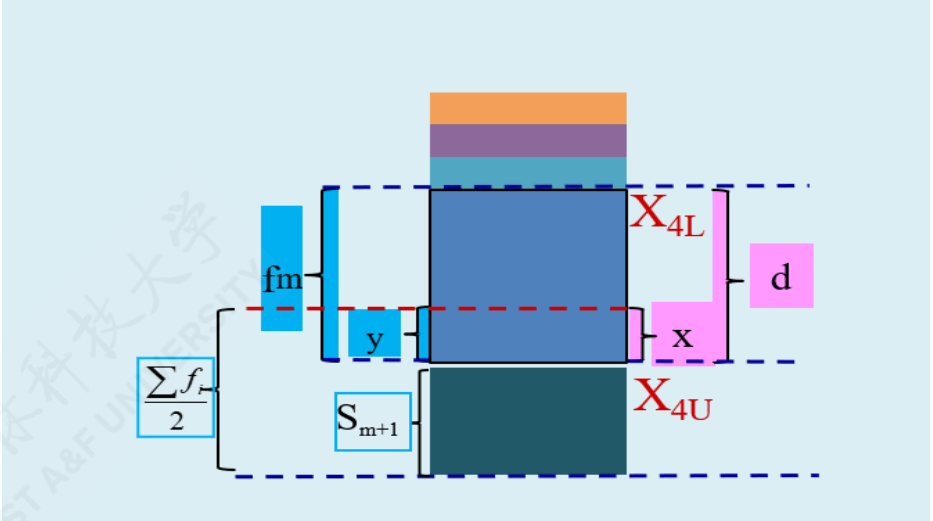
较大制给定下限值时，则采用**较大制下限公式** $(Max, Lower)$：

$$\frac{x}{d} = \frac{(S_m - \sum f_i/2)}{f_m} \quad \Rightarrow \quad M_{eL} = X_L + x$$

$$M_{eL} = X_L + \frac{S_m - \frac{\sum f}{2}}{f_m} \cdot d$$

（演示）中位数计算：较大制上限插值公式

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1		Max1
X_{2L}-X_{2U}	f2		Max2
X_{3L}-X_{3U}	f3		Max3
X_{4L}-X_{4U}	**f4**		**Max4**
X_{5L}-X_{5U}	f5		Max5
合计	$\sum f_i$		-

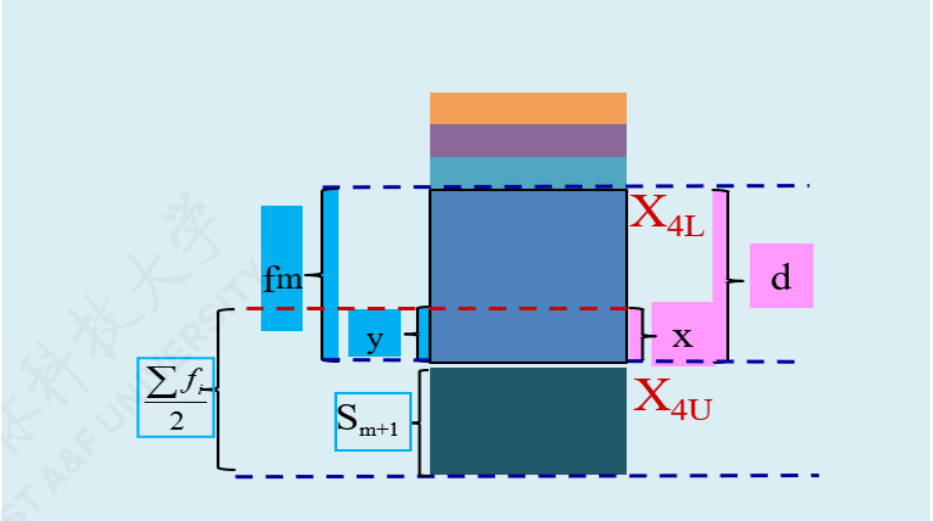


较大制且给定上限值时的相关定义：

- x_L表示组下限（Lower limits）； x_U表示组上限（Upper limits）。
- d表示众数组的**组距**（width）； x表示待求解的组距部分。
- f_m表示中位数组的频次，S_{m+1}表示中位数所在组的**后一组的较小累计频次**； y表示与 x宽度相对应频次。

（演示）中位数计算：较大制上限插值公式

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1		Max1
X_{2L}-X_{2U}	f2		Max2
X_{3L}-X_{3U}	f3		Max3
X_{4L}-X_{4U}	**f4**		**Max4**
X_{5L}-X_{5U}	f5		Max5
合计	$\sum f_i$		-



较大制给定上限值时，则采用**较大制上限公式** $(Max, Upper)$：

$$\frac{x}{d} = \frac{(\sum f_i/2 - S_{m+1})}{f_m} \quad \Rightarrow \quad M_{eU} = X_U - x$$

$$M_{eU} = X_U - \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{m+1}}{f_m} \cdot d$$

（示例）组距式分配数列中位数计算

案例说明：某工厂共有164个工人，全体工人的日产量（X）经过分组统计后（$G1 \sim G7$），各组工人人数（n）的分布数据如下表所示。请计算中位数是什么？

groups	X	n
G1	60Kg以下	10
G2	60-70Kg	19
G3	70-80Kg	50
G4	80-90Kg	36
G5	90-100Kg	27
G6	100-110Kg	14
G7	110Kg以上	8
Total	**-**	**164**

（示例）较小制情形下中位数计算：粗略结果

groups	X	n	cumsum
G1	60Kg以下	10	10
G2	60-70Kg	19	29
G3	70-80Kg	50	79
G4	**80-90Kg**	**36**	**115**
G5	90-100Kg	27	142
G6	100-110Kg	14	156
G7	110Kg以上	8	164
Total	**-**	**164**	

解题思路：

- 首先计算并得到**较小制累计频次表***（cumsum）（见左）。
- 然后计算中位数的位置 $p=\frac{(\sum f_i)}{2}=\frac{164}{2}=82$，根据累计频数观察得到中位数位置为 $p=4$，也即第G4组（日产量80-90Kg）。
- 根据中位数所在位置，初步得到中位数为：$M_e=$"80-90Kg"。

（示例）较小制情形下中位数计算：插值公式结果

groups	X	n	cumsum
G1	60Kg以下	10	10
G2	60-70Kg	19	29
G3	70-80Kg	50	79
G4	**80-90Kg**	**36**	**115**
G5	90-100Kg	27	142
G6	100-110Kg	14	156
G7	110Kg以上	8	164
Total	**-**	**164**	

- 较小制下限插值公式计算结果：

$$
\begin{aligned}
M_{eL} &= X_L + \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{m-1}}{f_m} \cdot d \\
&= 80 + \frac{82 - 79}{36} * 10 \\
&= 80.8333
\end{aligned}
$$

- 较小制上限插值公式计算结果：

$$
\begin{aligned}
M_{eU} &= X_U - \frac{S_m - \frac{\sum f}{2}}{f_m} \cdot d \\
&= 90 - \frac{115 - 82}{36} * 10 \\
&= 80.8333
\end{aligned}
$$

（示例）较大制情形下中位数计算：粗略结果

groups	X	n	cumsum
G1	60Kg以下	10	164
G2	60-70Kg	19	154
G3	70-80Kg	50	135
G4	**80-90Kg**	**36**	**85**
G5	90-100Kg	27	49
G6	100-110Kg	14	22
G7	110Kg以上	8	8
Total	**-**	**164**	

解题思路：

- 首先计算并得到**较大制累计频次表***（cumsum）（见左）。
- 然后计算中位数的位置 $p=\frac{(\sum f_i)}{2}=\frac{164}{2}=82$，根据累计频数观察得到中位数位置为 $p=4$，也即第G4组（日产量80-90Kg）。
- 根据中位数所在位置，初步得到中位数为：M_e ="80-90Kg"。

（示例）较大制情形下中位数计算：插值公式结果

groups	X	n	cumsum
G1	60Kg以下	10	164
G2	60-70Kg	19	154
G3	70-80Kg	50	135
G4	**80-90Kg**	**36**	**85**
G5	90-100Kg	27	49
G6	100-110Kg	14	22
G7	110Kg以上	8	8
Total	**-**	**164**	

- 较大制下限插值公式计算结果：

$$
\begin{aligned}
M_{eU} &= X_L + \frac{S_m - \frac{\sum f}{2}}{f_m} \cdot d \\
&= 80 + \frac{85 - 82}{36} * 10 \\
&= 80.8333
\end{aligned}
$$

- 较大制上限插值公式计算结果：

$$
\begin{aligned}
M_{eU} &= X_U - \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{m+1}}{f_m} \cdot d \\
&= 90 - \frac{82 - 49}{36} * 10 \\
&= 80.8333
\end{aligned}
$$

中位数特征：总结I

- 中位数不受极端值及开口组的影响，具有稳健性。
- 各单位标志值与中位数离差的绝对值之和是个最小值。

$$\sum |X - M_e| = \min; \quad or \quad \sum |X - M_e| f_i = \min$$

- 对某些不具有数学特点或不能用数字测定的现象，可用中位数求其一般水平。

中位数特征：总结2

中位数数值 M_e 受到中位数所在组的**较小累计频次** $S_{(m,Min)}$ 及**较大累计频次** $S_{(m,Max)}$ 数值大小的共同影响。

- 若 $S_{(m,Min)} = S_{(m,Max)}$，则中位数所在组的**组中值**等于插值近似计算值，也即：

$$M_e = M_{eL} = M_{eU} = \frac{X_U + X_L}{2}$$

- 若 $S_{(m,Min)} < S_{(m,Max)}$，则插值近似计算值更加接近于中位数所在组的**组上限**值，也即：

$$M_e = M_{eL} = M_{eU} \ll X_U$$

- 若 $S_{(m,Min)} > S_{(m,Max)}$，则插值近似计算值更加接近于中位数所在组的**组下限**值，也即：

$$M_e = M_{eL} = M_{eU} \gg X_L$$

四分位数：概念和特征

四分位数（Quartile）：排序后处于25%和75%位置上的值，包括四分之一位数（Q_1）和四分之三位数（Q_3）。

四分位数的特征：

- 不受极端值的影响。

四分位数：计算方法

情形1：未分组资料确定分位数；

> a.先排序。b.再确定1/4和3/4分割点位置。c.再确定两个分位数 Q_1和 Q_3。

四分位数：计算方法

情形1：未分组资料确定分位数；

> a.先排序。b.再确定1/4和3/4分割点位置。c.再确定两个分位数 Q_1和 Q_3。

情形2：分组资料确定分位数；

- 情形2-1：**单项式**分组数列计算中位数数

> a.确定1/4和3/4分割点位置。b.再确定两个分位数 Q_1和 Q_3。

- 情形2-2：**组距式**分组数列计算分位数

> a.计算累积频次，确定1/4和3/4分割点位置。b.初步确定两个分位数（所在组） Q_1和 Q_3。c.最后（利用插值公式近似）相对“精确地”估算两个分位数 Q_1和 Q_3。

四分位数计算：未分组资料

未分组资料的四分位数计算，主要步骤如下：

第一步：将总体各单位的标志值按大小顺序排列/或分组排序。

第二步：确定1/4和3/4分割点位置 p_1 和 p_3。

$$p_1 = \frac{n+1}{4}; \quad p_3 = \frac{3(n+1)}{4}$$

第三步：确定两个分位数 Q_1 和 Q_3。

- 若 $\frac{n+1}{4}$ 为整数，则 p_1 和 p_3 分割点位置对应的分组标志值则分别为对应的四分位数 Q_1 和 Q_3 。
- 若 $\frac{n+1}{4}$ 不是整数，则 要用分割点位置对应的两个相邻组近似计算（加权算术平均数）相应的分位数 Q_1 和 Q_3。

（示例）：未分组数据计算分位数

案例说明：有11名工人生成同种产品，日产量分别为：

```
 W1  W2  W3  W4  W5  W6  W7  W8  W9 W10 W11
  2   7   5   6   8  12   9  10  16  15  20
```

解题过程：我们注意到数据样本量 $(n+1)/4=3$，为整数。

（示例）：未分组数据计算分位数

案例说明：有11名工人生成同种产品，日产量分别为：

```
W1  W2  W3  W4  W5  W6  W7  W8  W9 W10 W11
 2   7   5   6   8  12   9  10  16  15  20
```

解题过程：我们注意到数据样本量 $(n+1)/4=3$，为整数。

- 对原始数据进行排序（由小到大）：

```
W1  W3  W4  W2  W5  W7  W8  W6 W10  W9 W11
 2   5   6   7   8   9  10  12  15  16  20
```

- 再确定分位数的位置，其中且 分割点为：$p_1=(n+1)/4=(11+1)/4=3$和 $p_3=3*(n+1)/4=3*(11+1)/4=9$。
- 因此得到分位数分别为 $Q_1=6$（件）和 $Q_3=15$（件）。

（示例）：未分组数据计算中位数

案例说明：继续前面案例数据，假设增加另1名工人的日产量数据：

```
 W1  W2  W3  W4  W5  W6  W7  W8  W9 W10 W11 W12
 22   2   7   5   6   8  12   9  10  16  15  20
```

解题过程：我们注意到数据样本量 $(n+1)/4=3$，不是整数。

（示例）：未分组数据计算中位数

案例说明：继续前面案例数据，假设增加另1名工人的日产量数据：

```
 W1  W2  W3  W4  W5  W6  W7  W8  W9 W10 W11 W12
 22   2   7   5   6   8  12   9  10  16  15  20
```

解题过程：我们注意到数据样本量 $(n+1)/4=3$，不是整数。

- 对原始数据进行排序（由小到大）：

```
 W2  W4  W5  W3  W6  W8  W9  W7 W11 W10 W12  W1
  2   5   6   7   8   9  10  12  15  16  20  22
```

- 再确定分位数的位置，其中且 分割点为：$p_1=(n+1)/4=(11+1)/4=3.25$和 $p_3=3*(n+1)/4=3*(11+1)/4=9.75$。
- 得到分位数分别为 $Q_1=(6+7)/2=6.5$（件）和 $Q_3=(15+16)/2=15.5$（件）。

四分位数计算：单项式数列

单项式数列的四分位数计算，主要步骤如下：

第一步：计算累计频次表。

第二步：确定1/4和3/4分割点位置 $p_1 = \frac{\sum f_i}{4}$ 和 $p_3 = \frac{3\sum f_i}{4}$。

第三步：观察比较分割点位置和累计频次，确定得到两个分位数 Q_1 和 Q_3。

（示例）：单项式数列计算四分位数

案例说明：继续前面甲城市家庭住房评价案例数据，请你计算出相应的两个四分位数？

甲城市住房满意度评价统计表

satisfication	n	cumsum
非常不满意	24	24
不满意	108	132
一般	93	225
满意	45	270
非常满意	30	300
Total	300	

解题过程：

- 计算累计频次表（见左）。
- 确定分位数的位置，其中且 分割点为：$p_1 = \frac{\sum f_i}{4} = \frac{300}{4} = 75$和 $p_3 = \frac{3\sum f_i}{4} = \frac{3*300}{4} = 225$。
- 观察累计频次，得到分位数分别为 Q_1 =“不满意”（第二组）和 Q_3 =“一般”（第三组）。

四分位数计算：组距式数列

组距式数列的四分位数计算，主要步骤如下：

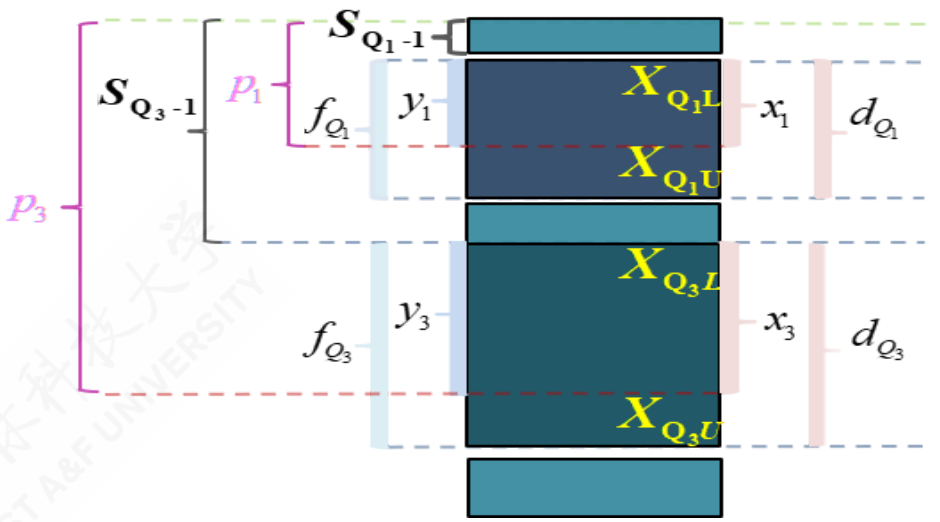
- **第一步**：先按组顺序，计算累计分布次数（较大制或较小制）。
- **第二步**：再确定1/4和3/4分割点位置 $p_1 = \frac{\sum f_i}{4}$ 和 $p_3 = \frac{3\sum f_i}{4}$。
- **第三步**：根据计算的位置，找到该分割点位置所在组，初步确定四分位数 Q_1 和 Q_3。
- **第四步**：利用合适的**插值公式**，近似计算得到更为“精确”的中位数数值 Q_1 和 Q_3。

（演示）分位数计算：较小制下限插值公式(定义)

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1	Min1	
X_{2L}-X_{2U}	f2	Min2	
X_{3L}-X_{3U}	f3	Min3	
X_{4L}-X_{4U}	f4	Min4	
X_{5L}-X_{5U}	f5	Min5	
合计	$\sum f_i$	-	

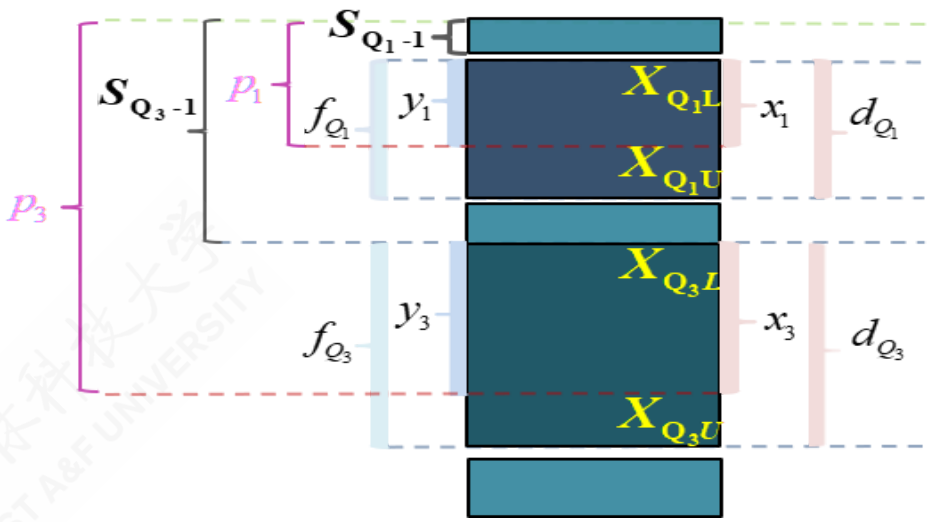
（演示）分位数计算：较小制下限插值公式(定义)

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1	Min1	
X_{2L}-X_{2U}	f2	Min2	
X_{3L}-X_{3U}	f3	Min3	
X_{4L}-X_{4U}	f4	Min4	
X_{5L}-X_{5U}	f5	Min5	
合计	$\sum f_i$	-	



（演示）分位数计算：较小制下限插值公式(定义)

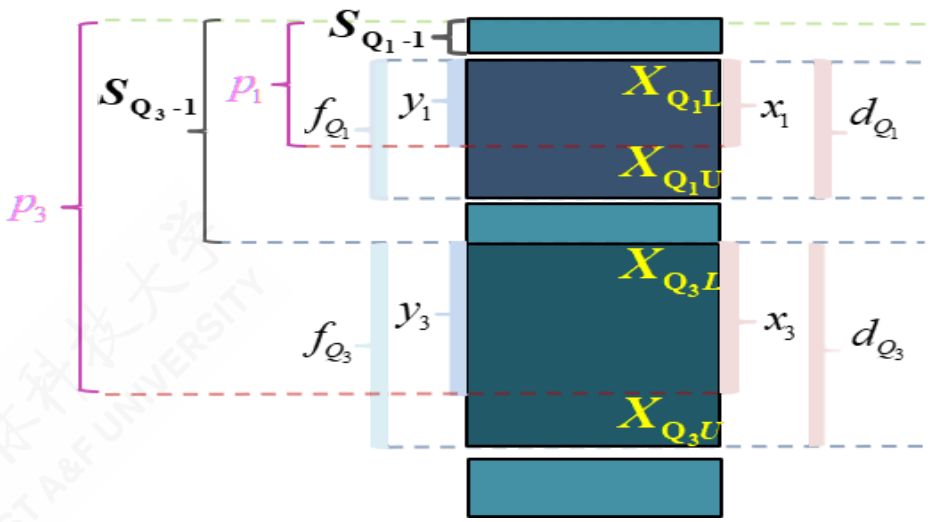
分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1	Min1	
X_{2L}-X_{2U}	f2	Min2	
X_{3L}-X_{3U}	f3	Min3	
X_{4L}-X_{4U}	f4	Min4	
X_{5L}-X_{5U}	f5	Min5	
合计	$\sum f_i$	-	



- Q_j表示四分位数，其中 $j \in 1,3$。 X_{Q_jL}表示组下限（Lower limits）； X_{Q_jU}表示组上限（Upper limits）。 d_{Q_j}表示分位数组的**组距**（width）； x_j表示待求解的组距部分。
- f_i表示各组所对应的频次，其中 $i \in 1,2,\cdots,5$。 f_{Q_j}表示分位数组的频次 p_j表示1/4或3/4分割位置，其中： $p_1 = \frac{\sum f_i}{4}$， $p_3 = \frac{3\sum f_i}{4}$。
- S_{Q_j-1}表示相应分位数所在组的**前一组的较小累计频次**； y_j表示与 x_j宽度相对应频次。

（演示）分位数计算：较小制下限插值公式(Q1)

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1	Min1	
X_{2L}-X_{2U}	f2	Min2	
X_{3L}-X_{3U}	f3	Min3	
X_{4L}-X_{4U}	f4	Min4	
X_{5L}-X_{5U}	f5	Min5	
合计	$\sum f_i$	-	

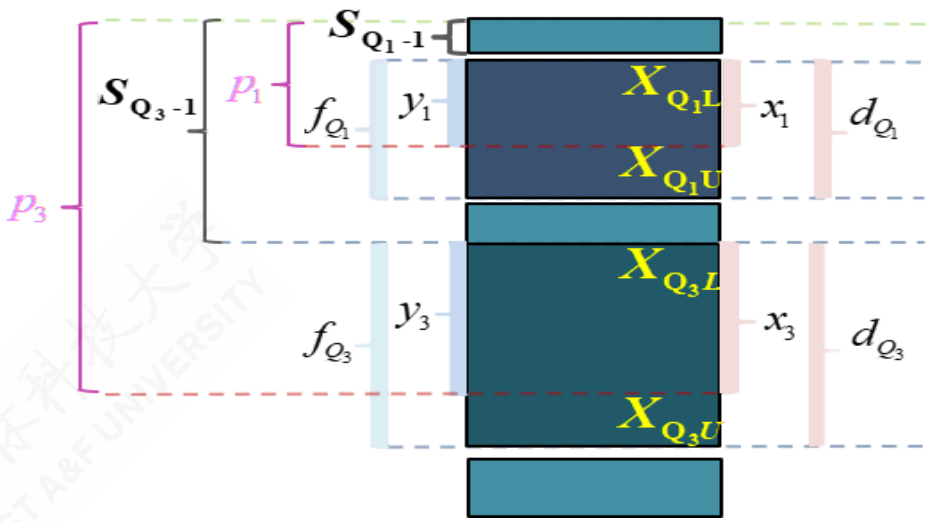


- 四分之一位数的较小制下限插值公式：

$$\frac{x_1}{d_{Q_1}} = \frac{y_1}{f_{Q_1}} = \frac{p_1 - S_{Q_1-1}}{f_{Q_1}} \quad \Rightarrow \quad Q_{1L} = X_{Q_1L} + \frac{\frac{\sum f_i}{4} - S_{Q_1-1}}{f_{Q_1}} \cdot d_{Q_1}$$

（演示）分位数计算：较小制下限插值公式(Q3)

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1	Min1	
X_{2L}-X_{2U}	f2	Min2	
X_{3L}-X_{3U}	f3	Min3	
X_{4L}-X_{4U}	f4	Min4	
X_{5L}-X_{5U}	f5	Min5	
合计	$\sum f_i$	-	



- 四分之三位数的较小制下限插值公式：

$$\frac{x_3}{d_{Q_3}} = \frac{y_3}{f_{Q_3}} = \frac{p_3 - S_{Q_3-1}}{f_{Q_3}} \quad \Rightarrow \quad Q_{3L} = X_{Q_3L} + \frac{\frac{3\sum f_i}{4} - S_{Q_3-1}}{f_{Q_3}} \cdot d_{Q_3}$$

（示例）较小制分位数计算：粗略结果

较小制累计频次表

groups	X	n	cumsum
G1	60Kg以下	10	10
G2	60-70Kg	19	29
G3	**70-80Kg**	**50**	**79**
G4	80-90Kg	36	115
G5	**90-100Kg**	**27**	**142**
G6	100-110Kg	14	156
G7	110Kg以上	8	164
Total	**-**	**164**	

解题思路：

- 首先计算并得到**较小制累计频次表**（cumsum）（见左）。
- 然后计算分位数分割位置

$p_1 = \frac{\sum f_i}{4} = \frac{164}{4} = 41$， $p_3 = \frac{3\sum f_i}{4} = \frac{3*164}{4} = 123$。

- 对照分位数的位置 p_j和较小累计频数，初步得到分位数：Q_1="70-80Kg"（G3组）；Q_3="90-100Kg"（G5组）。

（示例）较小制分位数计算：下限插值公式

较小制累计频次表

groups	X	n	cumsum
G1	60Kg以下	10	10
G2	60-70Kg	19	29
G3	**70-80Kg**	**50**	**79**
G4	80-90Kg	36	115
G5	**90-100Kg**	**27**	**142**
G6	100-110Kg	14	156
G7	110Kg以上	8	164
Total	**-**	**164**	

- 四分之一位数较小制下限公式计算结果：

$$Q_{1L} = X_{Q_1 L} + \frac{\frac{\sum f_i}{4} - S_{Q_1 - 1}}{f_{Q_1}} \cdot d_{Q_1}$$
$$= 70 + \frac{\frac{164}{4} - 29}{50} \times 10 = 72.4$$

- 四分之三位数较小制下限公式计算结果：

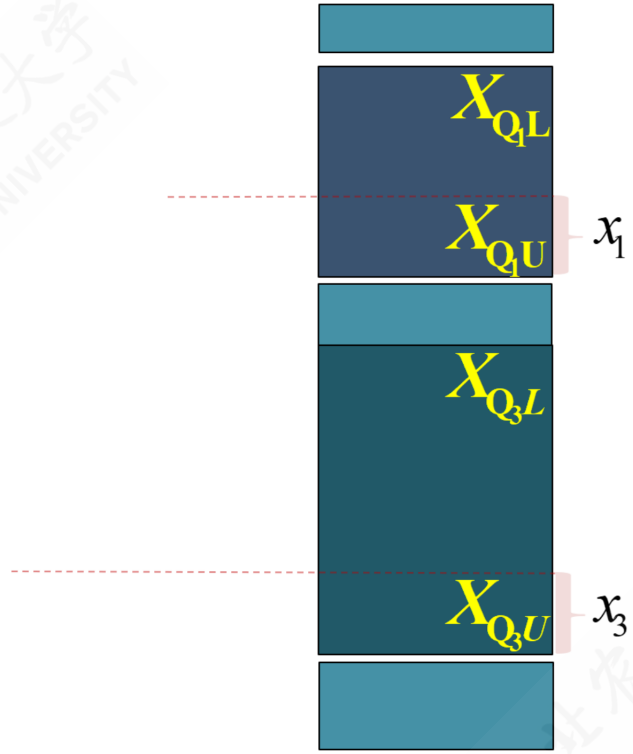
$$Q_{3L} = X_{Q_3 L} + \frac{\frac{3\sum f_i}{4} - S_{Q_3 - 1}}{f_{Q_3}} \cdot d_{Q_3}$$
$$= 90 + \frac{3 \times \frac{164}{4} - 115}{27} \times 10 = 92.96$$

含义：两个分位数之差，即为**四分位差**（QD）：$\mathrm{QD} = Q_3 - Q_1 = 92.96 - 72.4 = 20.56$。这表明：有一半工人的日产量分布在72.4～92.96之间，他们的最大差异为20.56Kg。

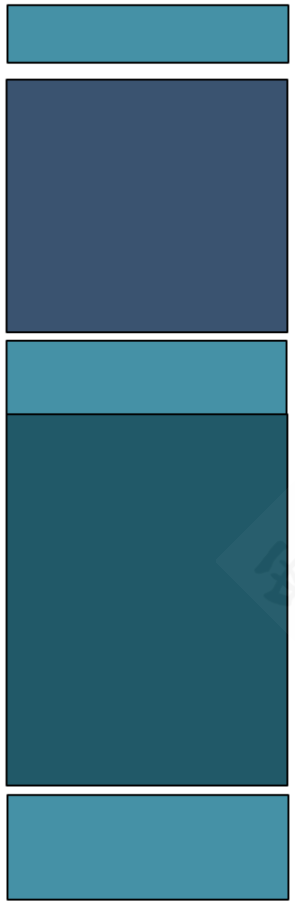
（演示）分位数计算：较小制上限插值公式(情景)

计算情形：只给出较小制累计次数，而且初步已知 Q_1 和 Q_3 的粗略位置（如图中所示分别为第2组和第4组）。请精确计算 Q_1 和 Q_3 的值。

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1	Min1	
X_{2L}-X_{2U}	f2	Min2	
X_{3L}-X_{3U}	f3	Min3	
X_{4L}-X_{4U}	f4	Min4	
X_{5L}-X_{5U}	f5	Min5	
合计	$\sum f_i$	-	

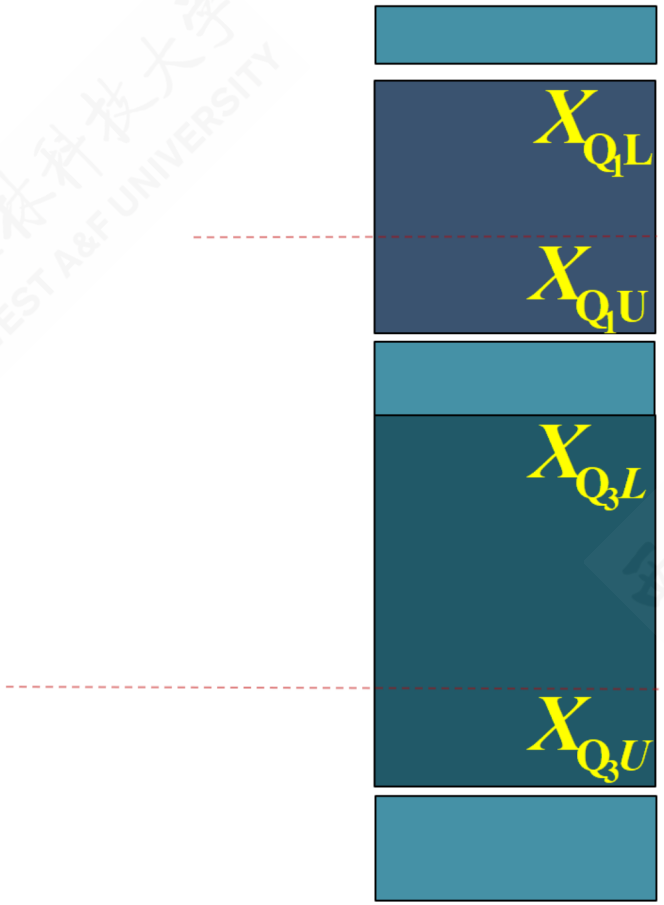


（演示）分位数计算：较小制上限插值公式(推导)



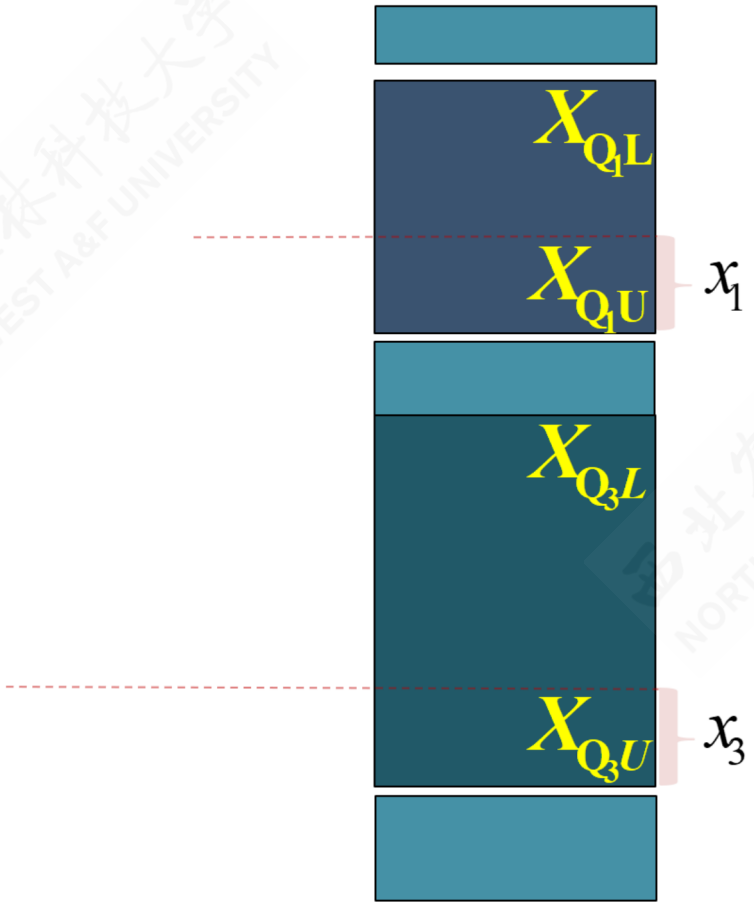
- Q_j表示四分位数，其中 $j \in 1,3$。X_{Q_jL}表示组下限（Lower limits）； X_{Q_jU}表示组上限（Upper limits）。 d_{Q_j}表示分位数组的**组距**（width）； x_j表示待求解的组距部分。
- f_i表示各组所对应的频次，其中 $i \in 1,2,\cdots,5$。 f_{Q_j}表示分位数组的频次。 p_j表示1/4或3/4分割位置，其中： $p_1 = \frac{\sum f_i}{4}$， $p_3 = \frac{3\sum f_i}{4}$。
- S_{Q_j}表示相应分位数所在组的**较小累计频次**； y_j表示与 x_j 宽度相对应频次。

（演示）分位数计算：较小制上限插值公式(推导)



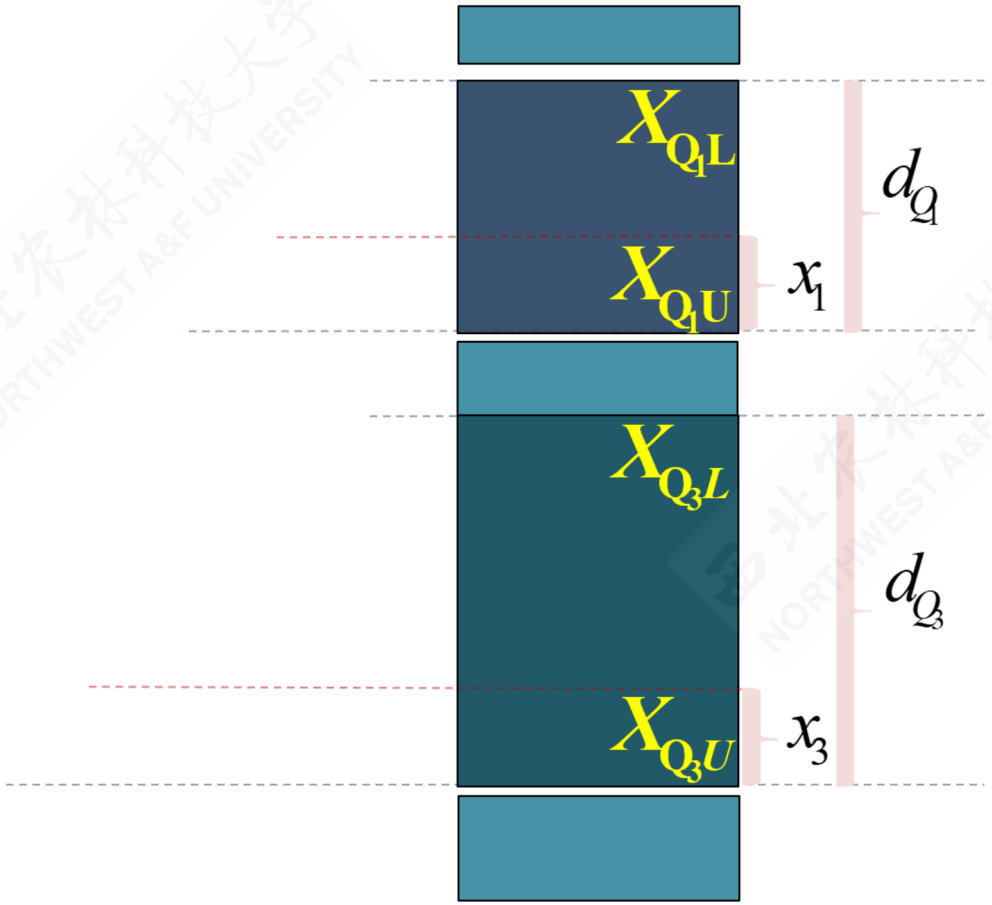
- Q_j表示四分位数，其中 $j \in 1,3$。X_{Q_jL}表示组下限（Lower limits）； X_{Q_jU}表示组上限（Upper limits）。 d_{Q_j}表示分位数组的**组距**（width）； x_j表示待求解的组距部分。
- f_i表示各组所对应的频次，其中 $i \in 1,2,\cdots,5$。 f_{Q_j}表示分位数组的频次。 p_j表示1/4或3/4分割位置，其中： $p_1 = \frac{\sum f_i}{4}$， $p_3 = \frac{3\sum f_i}{4}$。
- S_{Q_j}表示相应分位数所在组的**较小累计频次**； y_j表示与 x_j 宽度相对应频次。

（演示）分位数计算：较小制上限插值公式(推导)



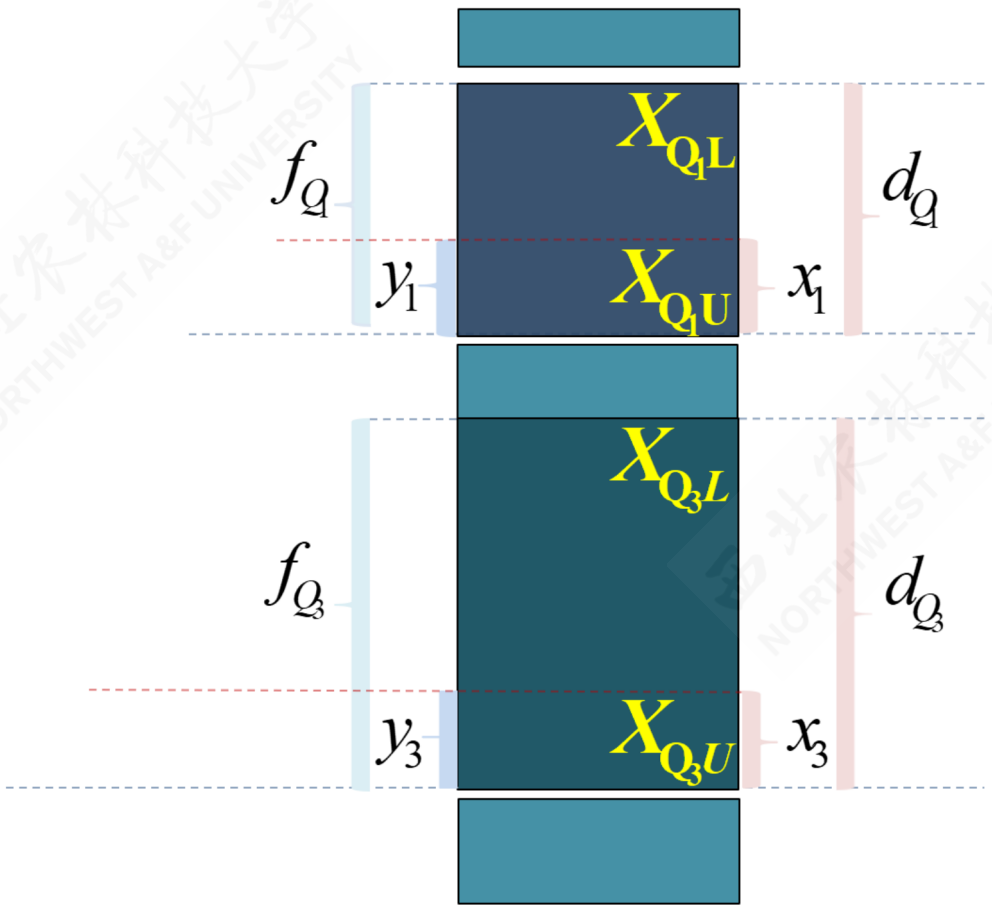
- Q_j表示四分位数，其中 $j \in 1,3$。X_{Q_jL}表示组下限（Lower limits）；X_{Q_jU}表示组上限（Upper limits）。d_{Q_j}表示分位数组的**组距**（width）；x_j表示待求解的组距部分。
- f_i表示各组所对应的频次，其中 $i \in 1,2,\cdots,5$。f_{Q_j}表示分位数组的频次。p_j表示1/4或3/4分割位置，其中：$p_1 = \frac{\sum f_i}{4}$，$p_3 = \frac{3\sum f_i}{4}$。
- S_{Q_j}表示相应分位数所在组的**较小累计频次**；y_j表示与 x_j 宽度相对应频次。

（演示）分位数计算：较小制上限插值公式(推导)



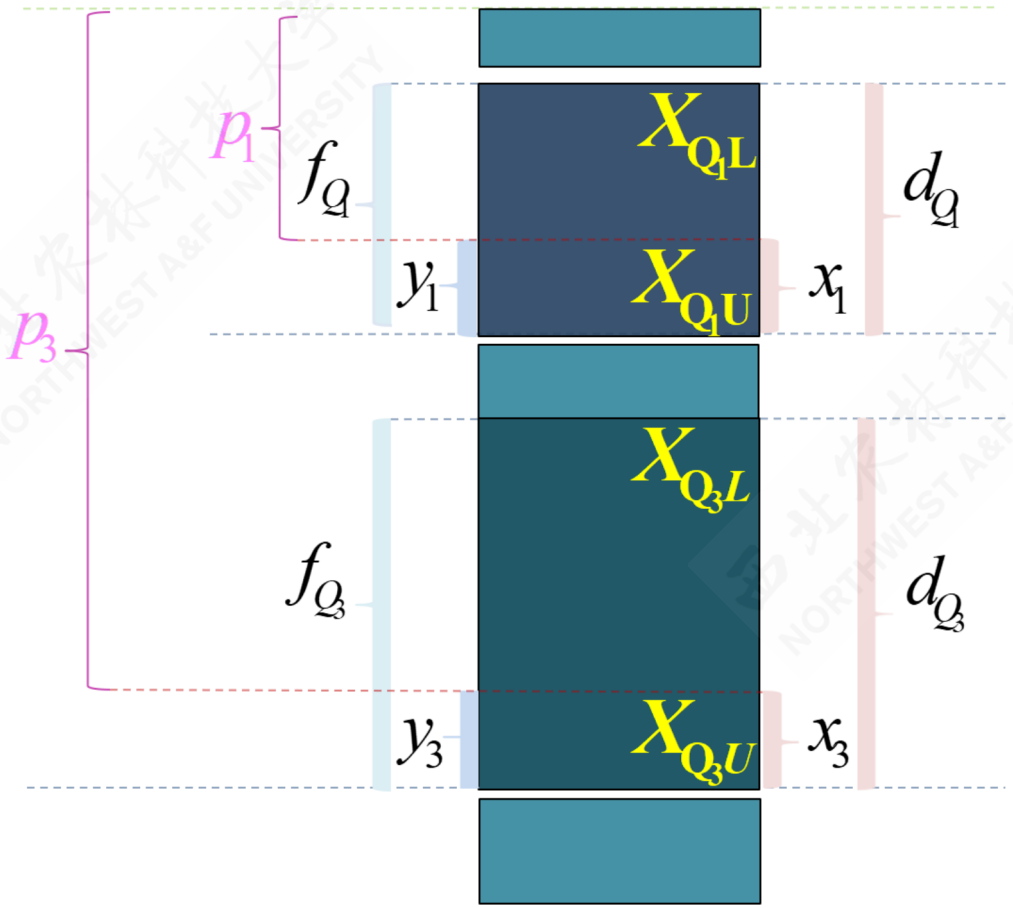
- Q_j表示四分位数，其中 $j \in 1,3$。X_{Q_jL}表示组下限（Lower limits）；X_{Q_jU}表示组上限（Upper limits）。d_{Q_j}表示分位数组的**组距**（width）；x_j表示待求解的组距部分。
- f_i表示各组所对应的频次，其中 $i \in 1,2,\cdots,5$。f_{Q_j}表示分位数组的频次。p_j表示1/4或3/4分割位置，其中：$p_1 = \frac{\sum f_i}{4}$，$p_3 = \frac{3\sum f_i}{4}$。
- S_{Q_j}表示相应分位数所在组的**较小累计频次**；y_j表示与 x_j 宽度相对应频次。

（演示）分位数计算：较小制上限插值公式(推导)



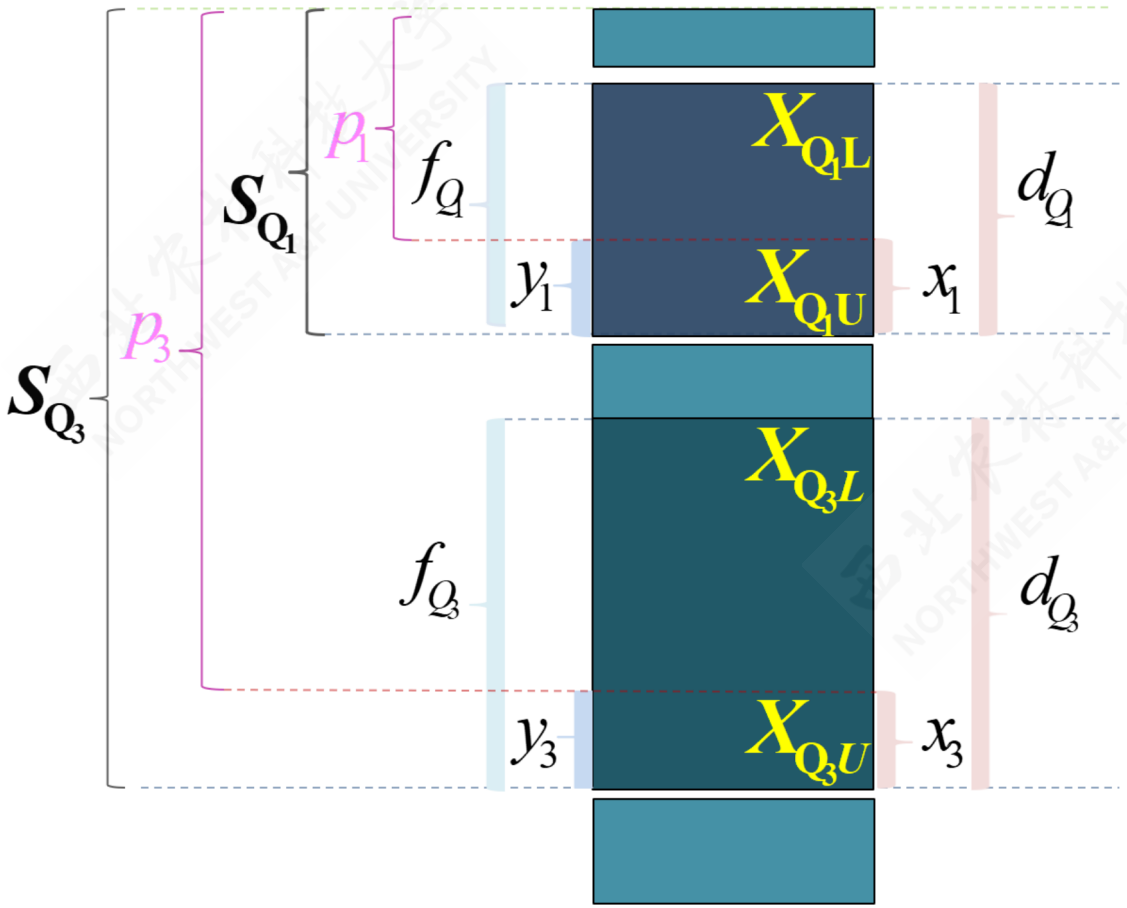
- Q_j表示四分位数，其中 $j \in 1,3$。X_{Q_jL}表示组下限（Lower limits）；X_{Q_jU}表示组上限（Upper limits）。d_{Q_j}表示分位数组的**组距**（width）；x_j表示待求解的组距部分。
- f_i表示各组所对应的频次，其中 $i \in 1,2,\cdots,5$。f_{Q_j}表示分位数组的频次。p_j表示1/4或3/4分割位置，其中：$p_1 = \frac{\sum f_i}{4}$，$p_3 = \frac{3\sum f_i}{4}$。
- S_{Q_j}表示相应分位数所在组的**较小累计频次**；y_j表示与 x_j 宽度相对应频次。

（演示）分位数计算：较小制上限插值公式(推导)



- Q_j表示四分位数，其中 $j \in 1,3$。X_{Q_jL}表示组下限（Lower limits）；X_{Q_jU}表示组上限（Upper limits）。d_{Q_j}表示分位数组的**组距**（width）；x_j表示待求解的组距部分。
- f_i表示各组所对应的频次，其中 $i \in 1,2,\cdots,5$。f_{Q_j}表示分位数组的频次。p_j表示1/4或3/4分割位置，其中：$p_1 = \frac{\sum f_i}{4}$，$p_3 = \frac{3\sum f_i}{4}$。
- S_{Q_j}表示相应分位数所在组的**较小累计频次**；y_j表示与 x_j 宽度相对应频次。

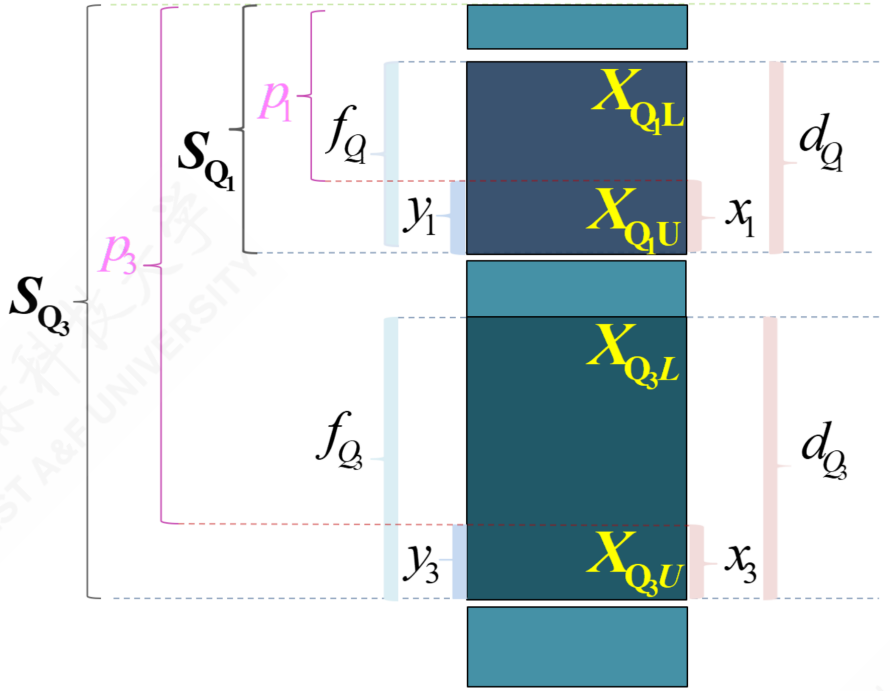
（演示）分位数计算：较小制上限插值公式(推导)



- Q_j表示四分位数，其中 $j \in 1,3$。X_{Q_jL}表示组下限（Lower limits）；X_{Q_jU}表示组上限（Upper limits）。d_{Q_j}表示分位数组的**组距**（width）；x_j表示待求解的组距部分。
- f_i表示各组所对应的频次，其中 $i \in 1,2,\cdots,5$。f_{Q_j}表示分位数组的频次。p_j表示1/4或3/4分割位置，其中：$p_1 = \frac{\sum f_i}{4}$，$p_3 = \frac{3\sum f_i}{4}$。
- S_{Q_j}表示相应分位数所在组的**较小累计频次**；y_j表示与 x_j 宽度相对应频次。

（演示）分位数计算：较小制上限插值公式(Q1)

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1	Min1	
X_{2L}-X_{2U}	f2	Min2	
X_{3L}-X_{3U}	f3	Min3	
X_{4L}-X_{4U}	f4	Min4	
X_{5L}-X_{5U}	f5	Min5	
合计	$\sum f_i$	-	

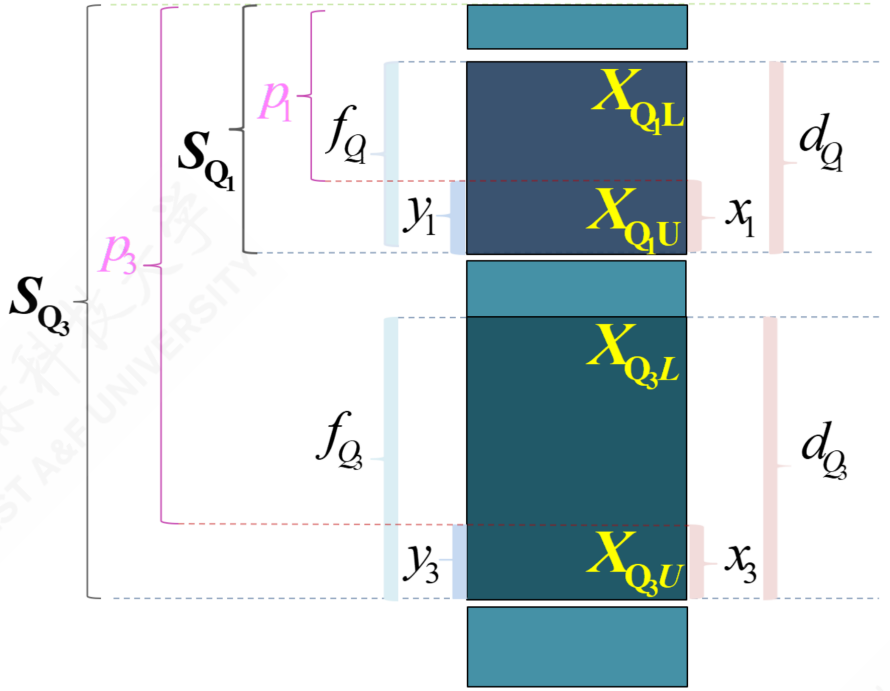


- 四分之一位数的较小制上限插值公式：

$$\frac{x_1}{d_{Q_1}} = \frac{y_1}{f_{Q_1}} = \frac{S_{Q_1} - p_1}{f_{Q_1}} \quad \Rightarrow \quad Q_{1U} = X_{Q_1U} - \frac{S_{Q_1} - \frac{\sum f_i}{4}}{f_{Q_1}} \cdot d_{Q_1}$$

（演示）分位数计算：较小制上限插值公式(Q3)

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1	Min1	
X_{2L}-X_{2U}	f2	Min2	
X_{3L}-X_{3U}	f3	Min3	
X_{4L}-X_{4U}	f4	Min4	
X_{5L}-X_{5U}	f5	Min5	
合计	$\sum f_i$	-	



- 四分之三位数的较小制上限插值公式：

$$\frac{x_3}{d_{Q_3}} = \frac{y_3}{f_{Q_3}} = \frac{S_{Q_3} - p_3}{f_{Q_3}} \quad \Rightarrow \quad Q_{3U} = X_{Q_3U} - \frac{S_{Q_3} - \frac{3\sum f_i}{4}}{f_{Q_3}} \cdot d_{Q_3}$$

（示例）较小制分位数计算：上限插值公式

案例数据　　计算过程

案例说明：根据前述工人日产量案例，假如只给出较小累计频次（见下表）。请分别计算精确的两个分位数值。

较小制累计频次表

groups	X	n	cumsum
G1	60Kg以下	10	10
G2	60-70Kg	19	29
G3	**70-80Kg**	**50**	**79**
G4	80-90Kg	36	115
G5	**90-100Kg**	**27**	**142**
G6	100-110Kg	14	156
G7	110Kg以上	8	164
Total	**-**	**164**	

（示例）较小制分位数计算：上限插值公式

案例数据　计算过程

- 四分之一位数**较小制**上限**公式**计算结果：

$$Q_{1L} = X_{\mathrm{Q_1}U} - \frac{S_{Q_1} - \frac{\sum f_i}{4}}{f_{Q_1}} \cdot d_{Q_1} = 80 - \frac{79 - \frac{164}{4}}{50} \times 10 = 72.4$$

- 四分之三位数**较小制**上限**公式**计算结果：

$$Q_{3U} = X_{\mathrm{Q_3}U} - \frac{S_{Q_3} - \frac{3\sum f_i}{4}}{f_{Q_3}} \cdot d_{Q_3} = 100 - \frac{142 - \frac{3\times 164}{4}}{27} \times 10 = 92.96$$

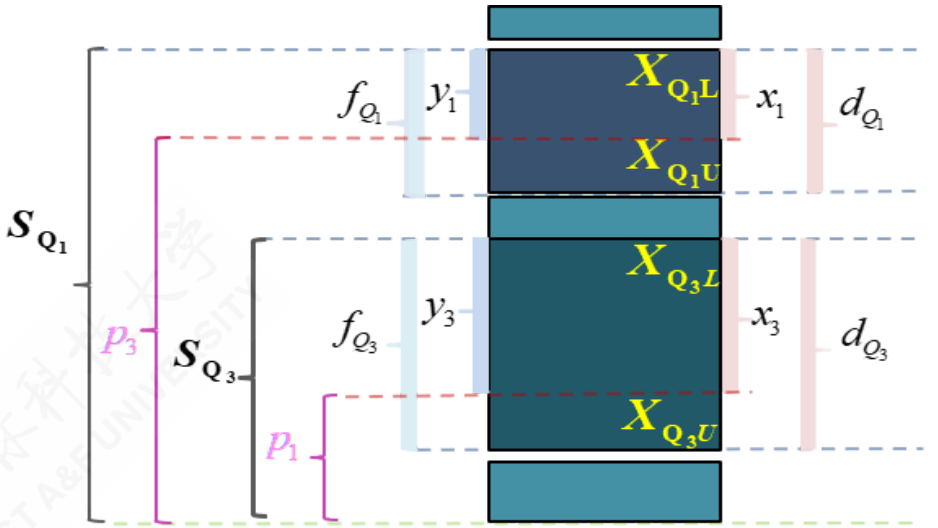
含义：两个分位数之差，即为**四分位差**（QD）：$\mathbf{QD} = Q_3 - Q_1 = 92.96 - 72.4 = 20.56$。这表明：有一半工人的日产量分布在72.4～92.96之间，他们的最大差异为20.56Kg。

（演示）分位数计算：较大制下限插值公式(定义)

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1		Max1
X_{2L}-X_{2U}	f2		Max2
X_{3L}-X_{3U}	f3		Max3
X_{4L}-X_{4U}	f4		Max4
X_{5L}-X_{5U}	f5		Max5
合计	$\sum f_i$		-

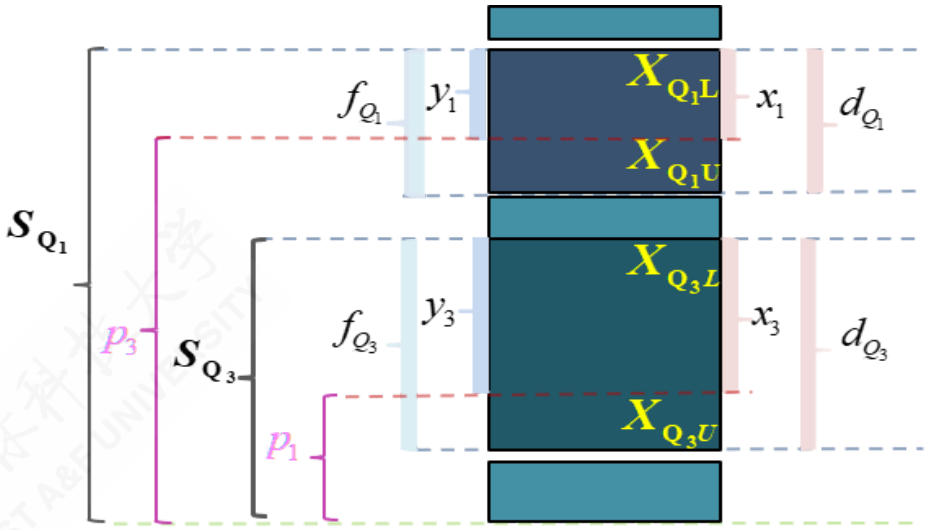
（演示）分位数计算：较大制下限插值公式(定义)

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1		Max1
X_{2L}-X_{2U}	f2		Max2
X_{3L}-X_{3U}	f3		Max3
X_{4L}-X_{4U}	f4		Max4
X_{5L}-X_{5U}	f5		Max5
合计	$\sum f_i$		-



（演示）分位数计算：较大制下限插值公式(定义)

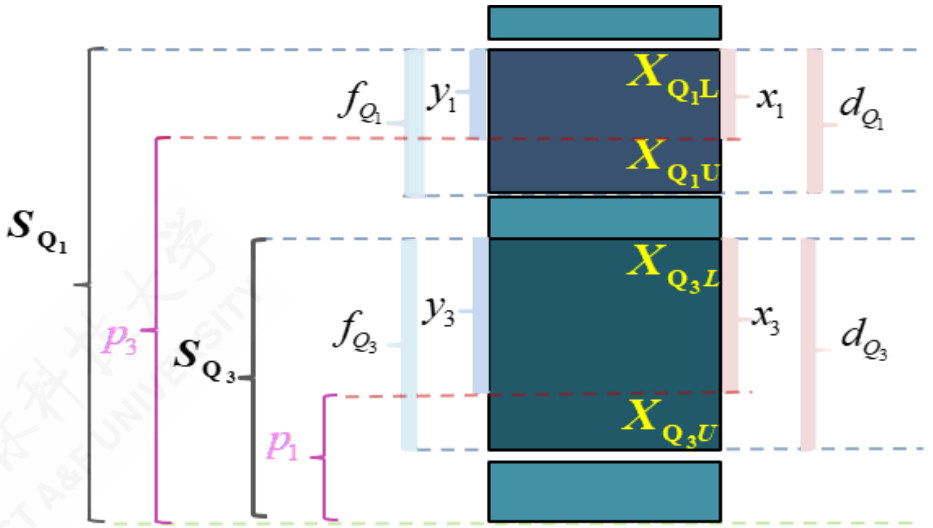
分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1		Max1
X_{2L}-X_{2U}	f2		Max2
X_{3L}-X_{3U}	f3		Max3
X_{4L}-X_{4U}	f4		Max4
X_{5L}-X_{5U}	f5		Max5
合计	$\sum f_i$		-



- Q_j表示四分位数，其中 $j \in 1,3$。 X_{Q_jL}表示组下限（Lower limits）； X_{Q_jU}表示组上限（Upper limits）。 d_{Q_j}表示分位数组的**组距**（width）； x_j表示待求解的组距部分。
- f_i表示各组所对应的频次，其中 $i \in 1,2,\cdots,5$。 f_{Q_j}表示分位数组的频次 p_j表示1/4或3/4分割位置，其中： $p_1 = \frac{\sum f_i}{4}$， $p_3 = \frac{3\sum f_i}{4}$。
- S_{Q_j}表示相应分位数所在组的**较大累计频次**； y_j表示与 x_j宽度相对应频次。

（演示）分位数计算：较大制下限插值公式(Q1)

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1		Max1
X_{2L}-X_{2U}	f2		Max2
X_{3L}-X_{3U}	f3		Max3
X_{4L}-X_{4U}	f4		Max4
X_{5L}-X_{5U}	f5		Max5
合计	$\sum f_i$		-

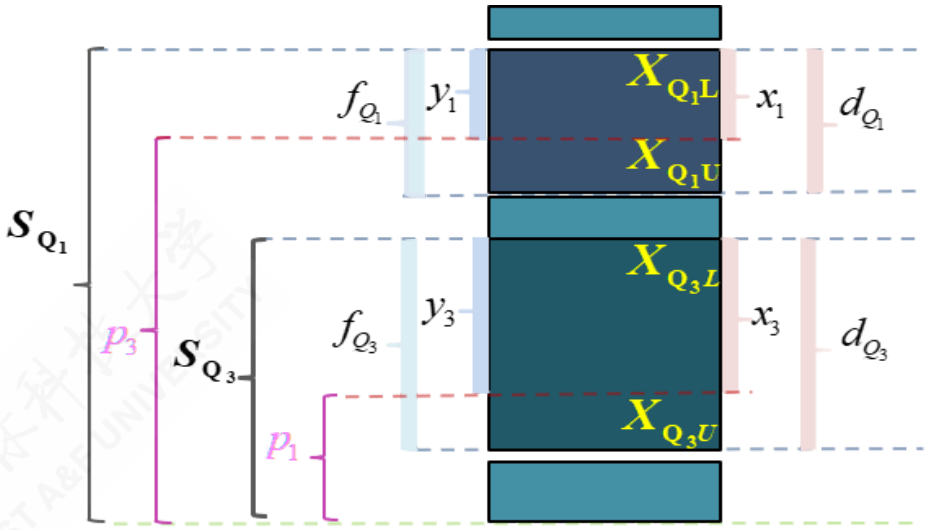


- 四分之一位数的较大制下限插值公式：

$$\frac{x_1}{d_{Q_1}} = \frac{y_1}{f_{Q_1}} = \frac{S_{Q_1} - p_3}{f_{Q_1}} \quad \Rightarrow \quad Q_{1L} = X_{Q_1L} + \frac{S_{Q_1} - \frac{3\sum f_i}{4}}{f_{Q_1}} \cdot d_{Q_1}$$

（演示）分位数计算：较大制下限插值公式(Q3)

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1		Max1
X_{2L}-X_{2U}	f2		Max2
X_{3L}-X_{3U}	f3		Max3
X_{4L}-X_{4U}	f4		Max4
X_{5L}-X_{5U}	f5		Max5
合计	$\sum f_i$		-



- 四分之三位数的较大制下限插值公式：

$$\frac{x_3}{d_{Q_3}} = \frac{y_3}{f_{Q_3}} = \frac{S_{Q_3} - p_1}{f_{Q_3}} \quad \Rightarrow \quad Q_{3L} = X_{Q_3L} + \frac{S_{Q_3} - \frac{\sum f_i}{4}}{f_{Q_3}} \cdot d_{Q_3}$$

（示例）较大制分位数计算：粗略结果

较大制累计频次表

groups	X	n	cumsum
G1	60Kg以下	10	164
G2	60-70Kg	19	154
G3	**70-80Kg**	**50**	**135**
G4	80-90Kg	36	85
G5	**90-100Kg**	**27**	**49**
G6	100-110Kg	14	22
G7	110Kg以上	8	8
Total	**-**	**164**	

解题思路：

- 首先计算并得到**较大制累计频次表**（cumsum）（见左）。
- 然后计算分位数分割位置：

  $p_1 = \frac{3\sum f_i}{4} = \frac{3\times 164}{4} = 123$，　$p_3 = \frac{\sum f_i}{4} = \frac{164}{4} = 41$。
- 对照分位数的位置 p_j和较大累计频数，初步得到分位数：Q_1="70-80Kg"（G3组）；Q_3="90-100Kg"（G5组）。

注意：*较大制下，分位数分割位置要调换！

（示例）较大制分位数计算：下限插值公式

较大制累计频次表

groups	X	n	cumsum
G1	60Kg以下	10	164
G2	60-70Kg	19	154
G3	**70-80Kg**	**50**	**135**
G4	80-90Kg	36	85
G5	**90-100Kg**	**27**	**49**
G6	100-110Kg	14	22
G7	110Kg以上	8	8
Total	**-**	**164**	

- 四分之一位数较大制下限公式计算结果：

$$Q_{1L} = X_{Q_1 L} + \frac{S_{Q_1} - \frac{3\sum f_i}{4}}{f_{Q_1}} \cdot d_{Q_1}$$
$$= 70 + \frac{135 - 3 \times \frac{164}{4}}{50} \times 10 = 72.4$$

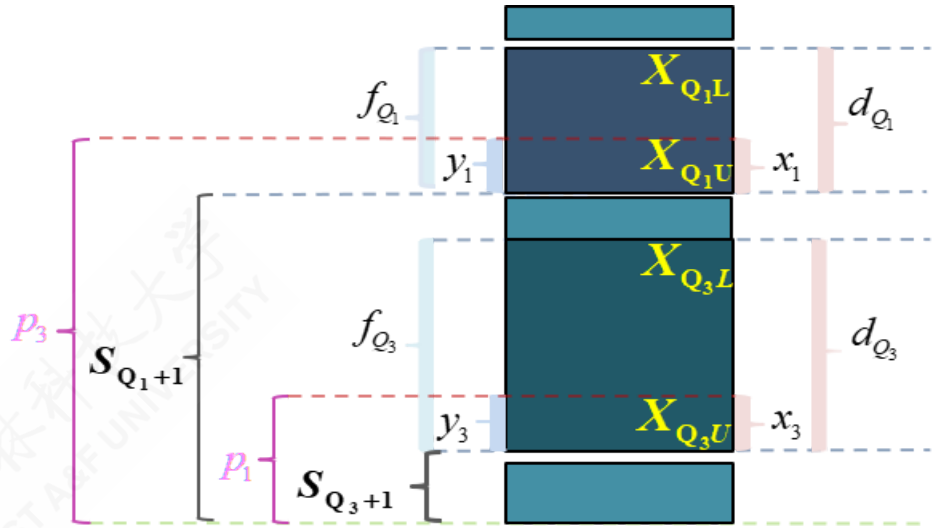
- 四分之三位数较大制下限公式计算结果：

$$Q_{3L} = X_{Q_3 L} + \frac{S_{Q_3} - \frac{\sum f_i}{4}}{f_{Q_3}} \cdot d_{Q_3}$$
$$= 90 + \frac{49 - \frac{164}{4}}{27} \times 10 = 92.96$$

含义：两个分位数之差，即为**四分位差**（QD）：$\mathbf{QD} = Q_3 - Q_1 = 92.96 - 72.4 = 20.56$。这表明：有一半工人的日产量分布在72.4～92.96之间，他们的最大差异为20.56Kg。

（演示）分位数计算：较大制上限插值公式(定义)

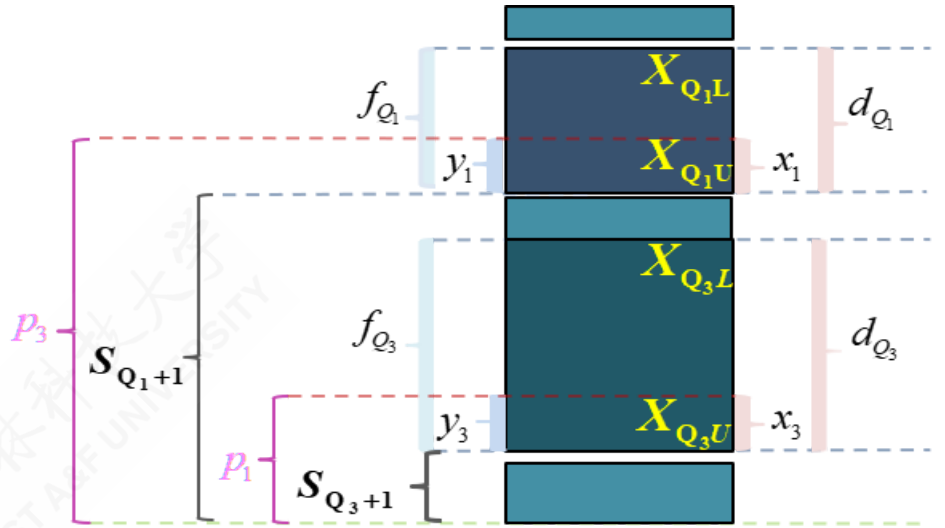
分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1		Max1
X_{2L}-X_{2U}	f2		Max2
X_{3L}-X_{3U}	f3		Max3
X_{4L}-X_{4U}	f4		Max4
X_{5L}-X_{5U}	f5		Max5
合计	$\sum f_i$		-



- Q_j表示四分位数，其中 $j \in 1,3$。 X_{Q_jL}表示组下限（Lower limits）； X_{Q_jU}表示组上限（Upper limits）。 d_{Q_j}表示分位数组的**组距**（width）； x_j表示待求解的组距部分。
- f_i表示各组所对应的频次，其中 $i \in 1,2,\cdots,5$。 f_{Q_j}表示分位数组的频次。 p_j表示1/4或3/4分割位置，其中： $p_1 = \frac{\sum f_i}{4}$， $p_3 = \frac{3\sum f_i}{4}$。
- S_{Q_j+1}表示相应分位数所在组的下一组的**较大累计频次**； y_j表示与 x_j宽度相对应频次。

（演示）分位数计算：较大制上限插值公式(Q1)

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1		Max1
X_{2L}-X_{2U}	f2		Max2
X_{3L}-X_{3U}	f3		Max3
X_{4L}-X_{4U}	f4		Max4
X_{5L}-X_{5U}	f5		Max5
合计	$\sum f_i$		-

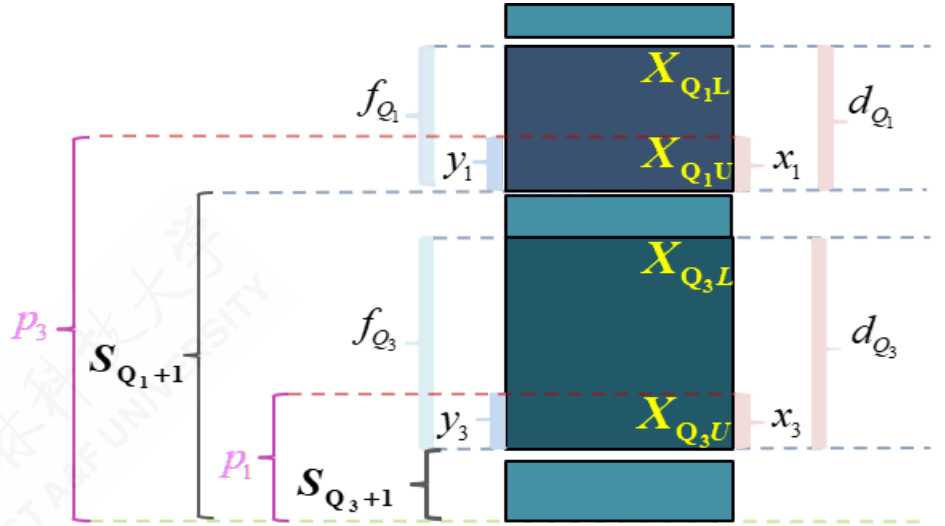


- 四分之一位数的较大制上限插值公式：

$$\frac{x_1}{d_{Q_1}} = \frac{y_1}{f_{Q_1}} = \frac{p_3 - S_{Q_1}}{f_{Q_1}} \quad \Rightarrow \quad Q_{1U} = X_{Q_1U} - \frac{\frac{3\sum f_i}{4} - S_{Q_1+1}}{f_{Q_1}} \cdot d_{Q_1}$$

（演示）分位数计算：较大制上限插值公式(Q3)

分组	次数	较小制	较大制
X_{1L}-X_{1U}	f1		Max1
X_{2L}-X_{2U}	f2		Max2
X_{3L}-X_{3U}	f3		Max3
X_{4L}-X_{4U}	f4		Max4
X_{5L}-X_{5U}	f5		Max5
合计	$\sum f_i$		-



- 四分之三位数的较大制上限插值公式：

$$\frac{x_3}{d_{Q_3}} = \frac{y_3}{f_{Q_3}} = \frac{p_1 - S_{Q_3+1}}{f_{Q_3}} \quad \Rightarrow \quad Q_{3U} = X_{Q_3U} - \frac{\frac{\sum f_i}{4} - S_{Q_3+1}}{f_{Q_3}} \cdot d_{Q_3}$$

（示例）较大制分位数计算：上限插值公式

较大制累计频次表

groups	X	n	cumsum
G1	60Kg以下	10	164
G2	60-70Kg	19	154
G3	**70-80Kg**	**50**	**135**
G4	80-90Kg	36	85
G5	**90-100Kg**	**27**	**49**
G6	100-110Kg	14	22
G7	110Kg以上	8	8
Total	**-**	**164**	

- 四分之一位数较大制上限公式计算结果：

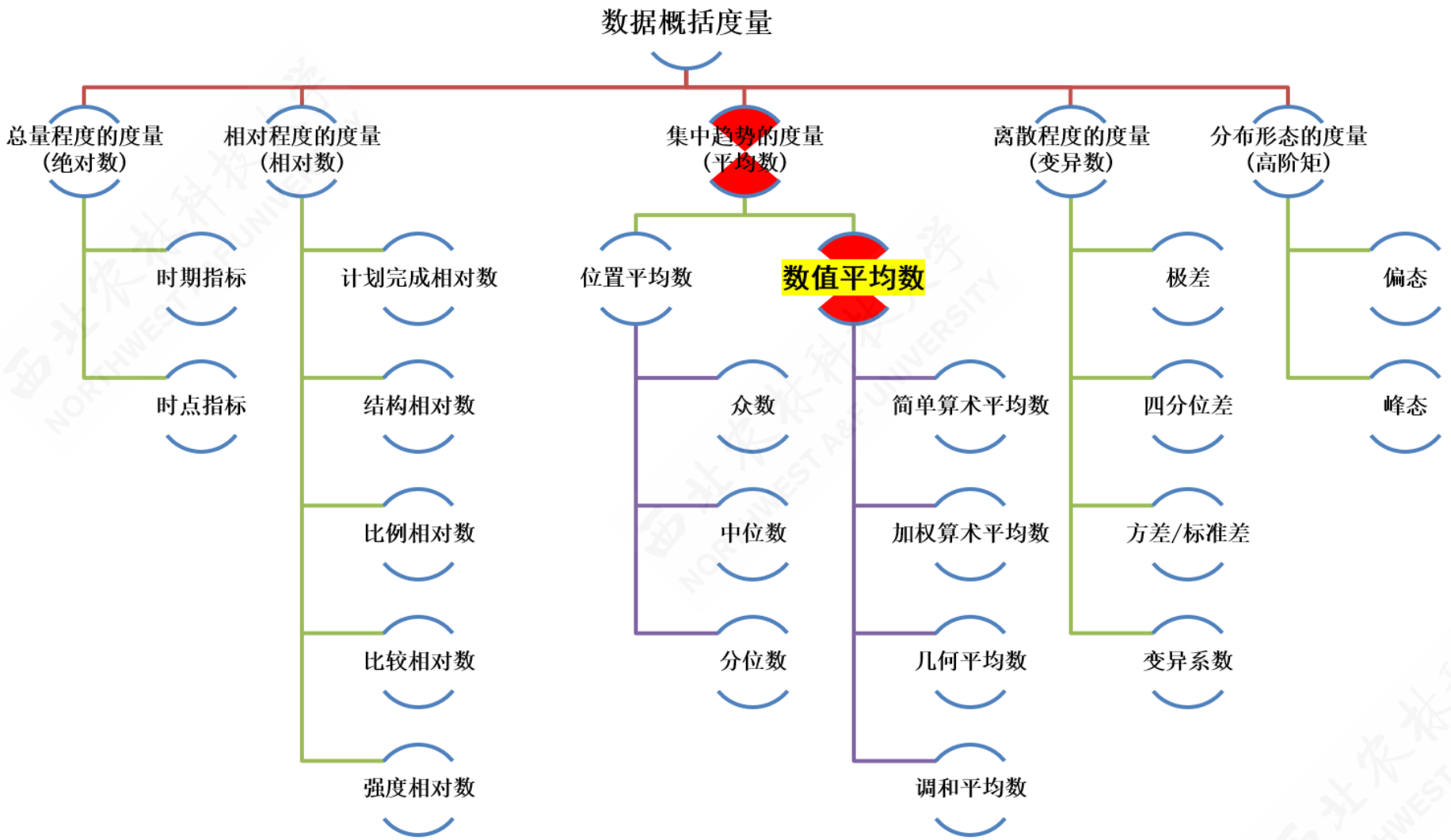
$$Q_{1U} = X_{Q_1U} - \frac{\frac{3\sum f_i}{4} - S_{Q_1+1}}{f_{Q_1}} \cdot d_{Q_1}$$
$$= 80 - \frac{\frac{3\times 164}{4} - 85}{50} \times 10 = 72.4$$

- 四分之三位数较大制上限公式计算结果：

$$Q_{3U} = X_{Q_3U} - \frac{\frac{\sum f_i}{4} - S_{Q_3+1}}{f_{Q_3}} \cdot d_{Q_3}$$
$$= 100 - \frac{\frac{164}{4} - 22}{27} \times 10 = 92.96$$

含义：两个分位数之差，即为**四分位差**（QD）：$\mathbf{QD} = Q_3 - Q_1 = 92.96 - 72.4 = 20.56$。这表明：有一半工人的日产量分布在72.4～92.96之间，他们的最大差异为20.56Kg。

内容导航


数据概括度量
总量程度的度量（绝对数）
相对程度的度量（相对数）
集中趋势的度量（平均数）
离散程度的度量（变异数）
分布形态的度量（高阶矩）
时期指标
时点指标
计划完成相对数
结构相对数
比例相对数
比较相对数
强度相对数
位置平均数
数值平均数
众数
中位数
分位数
简单算术平均数
加权算术平均数
几何平均数
调和平均数
极差
四分位差
方差/标准差
变异系数
偏态
峰态

平均数：概念与定义

平均数：是对数据的中心的一种数值化测量指标。

- 根据总体数据（population）计算的，则称为**总体期望（expectation）**，记为 μ；读作 `miu`。
- 根据样本数据（sample）计算的，则称为样本平均数，也称为**均值（Mean）**，记为 $\bar{x}$，读作`X bar`。

我们一般所说的平均数是指**样本均值**。

平均数：特征与类型

平均数的特征：

- 集中趋势的最常用测度值，是一组数据的均衡点（中心点）所在
- 体现了数据的必然性特征，易受极端值的影响

平均数的类型：

- 算术平均数，记为 $\bar{X}$。具体又分为：

> a. 简单算数平均数 $\bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}$； b. 加权算数平均数 $\bar{X}=\frac{\sum(f_iX_i)}{\sum f_i}$。

- 调和平均数，记为 $\bar{X}_H$。
- 几何平均数，记为 $\bar{X}_G$。

算术平均数：概念

设样本量为 n 的样本数据来自于一个总体（总体数据量为 N）。

数据来源：

- 样本数据：$X_1, X_2, \cdots, X_n$
- 总体数据：$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots, X_N$

公式定义：

- **样本平均数计算公式：**

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

- **总体平均数（期望）计算公式：**

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

下面我们重点谈**样本平均数**的计算和分析！

算数平均数：基本公式

样本**算术平均数**具体包括两类：

- 简单算数平均数

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

- 加权算数平均数

> 若给出频次（次数）f_i数据：
>
> $$\bar{X} = \frac{\sum_1^n (f_i X_i)}{\sum_1^n f_i}$$

> 若给出频率（比重）$w_i = \frac{f_i}{\sum_1^n f_i}$数据：
>
> $$\bar{X} = \sum_1^n \left(X_i \cdot \left(\frac{f_i}{\sum_1^n f_i} \right) \right)$$

简单算术平均数的计算

适合情形：未分组资料

计算规则：将各总体单位的标志值简单相加，除以总体单位数所求得的结果。

计算公式：

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

简单算术平均数的计算

适合情形：未分组资料

计算规则：将各总体单位的标志值简单相加，除以总体单位数所求得的结果。

计算公式：

$$\bar{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$$

计算示例：某单位有8名职工，周工资分别为1200元、1400元、1500元、1600元、1650元、1700元、1750元和1800元，则8名职工平均工资为：

$$\begin{aligned}\bar{X}&=\frac{\sum X}{n}=\frac{X_1+X_2+X_3+\cdots\ldots+X_n}{n}\\&=\frac{1200+1400+1500+1600+1650+1700+1750+1800}{8}\\&=1575(\text{元})\end{aligned}$$

加权算术平均数：计算概述

适合情形：分组数据且各组次数不完全相同。

计算规则：各组变量值（组中值）乘以各组权数求出标志总量，再将各组权数相加求出总体单位数，二者相除计算出的结果。

一般公式：

$$\bar{X}=\frac{X_1f_1+X_2f_2+\ldots\ldots+X_kf_k}{f_1+f_2+\ldots\ldots+f_k}=\frac{\sum_{i=1}^{k}X_if_i}{\sum_{i=1}^{k}f_i}=\frac{\sum Xf}{\sum f}$$

加权算术平均数：计算概述

计算类型：

- 单项式分配数列的计算
- 组距式分配数列的计算

计算要点：

- 变量值（X_i）：单项式分组为组标志值；组距式分组为组中值。
- 权数（f_i）：具有权衡轻重的作用。权重既可以是**频数**（绝对数），也可以是**频率**（相对数）。

> 如果是频次（次数）f_i数据：
>
> $$\bar{X} = \frac{\sum_1^n (f_i X_i)}{\sum_1^n f_i}$$

> 如果是频率（比重）$w_i = \frac{f_i}{\sum_1^n f_i}$：
>
> $$\bar{X} = \sum_1^n \left(X_i \cdot \left(\frac{f_i}{\sum_1^n f_i} \right) \right)$$

（示例）加权平均数计算：单项式数列

案例说明：某工厂共有105个工人，全体工人的日产量（x，件/日）经过分组统计后（$G1 \sim G6$），各组工人人数（n）的数据如下表所示。请计算全体工人的平均日产量是多少？

group	X	f
G1	5	8
G2	6	12
G3	7	19
G4	8	35
G5	9	25
G6	10	6
Total	**45**	**105**

说明：可参看之前的单项式数列中位数计算-工人日产量案例

（示例）加权平均数计算：单项式数列

解答过程：

- 根据分组标志值（日产量）X和频次权重（职工人数）f，计算得到各组的日产量Xf。（见右）
- 利用加权平均数公式计算得到平均日产量。

计算表

group	X	f	Xf
G1	5	8	40
G2	6	12	72
G3	7	19	133
G4	8	35	280
G5	9	25	225
G6	10	6	60
Total	**45**	**105**	**810**

$$\bar{X}=\frac{X_1f_1+X_2f_2+\ldots\ldots+X_kf_k}{f_1+f_2+\ldots\ldots+f_k}=\frac{810}{105}=7.71(\text{件/人})$$

（示例）加权平均数计算：组距式数列

案例说明：某工厂共有164个工人，全体工人的日产量（X）经过分组统计后（$G1 \sim G7$），各组工人人数（f）的分布数据如下表所示。请计算全体工人的平均日产量是多少千克？

groups	X	f
G1	60Kg以下	10
G2	60-70Kg	19
G3	70-80Kg	50
G4	80-90Kg	36
G5	90-100Kg	27
G6	100-110Kg	14
G7	110Kg以上	8
Total	**-**	**164**

说明：可参看之前的组距式数列中位数计算-工人日产量案例

（示例）加权平均数计算：组距式数列（频次）

解答过程：

- 根据组距式分组标志值（日产量）x，计算各组的组中值，然后再利用频次权重（职工人数）f，计算得到各组的日产量 xf。（见右）
- 利用加权平均数公式计算得到平均日产量：

groups	X	Xi	f	Xf
G1	60Kg以下	55	10	550
G2	60-70Kg	65	19	1235
G3	70-80Kg	75	50	3750
G4	80-90Kg	85	36	3060
G5	90-100Kg	95	27	2565
G6	100-110Kg	105	14	1470
G7	110Kg以上	115	8	920
Total	**-**	**595**	**164**	**13550**

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i \cdot f_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{13550}{164} = 82.62(\text{千克})$$

（示例）加权平均数计算：组距式数列（频率）

解答过程：

- 根据组距式分组标志值（日产量）x，计算各组的组中值，然后再利用频次（职工人数）f计算出各组的频率权重（职工占比）w，计算得到各组的日产量xw。（见右）
- 利用加权平均数公式计算得到平均日产量。

groups	X	Xi	f	w	Xw
G1	60Kg以下	55	10	0.06	3.35
G2	60-70Kg	65	19	0.12	7.53
G3	70-80Kg	75	50	0.30	22.87
G4	80-90Kg	85	36	0.22	18.66
G5	90-100Kg	95	27	0.16	15.64
G6	100-110Kg	105	14	0.09	8.96
G7	110Kg以上	115	8	0.05	5.61
Total	**-**	**595**	**164**	**1.00**	**82.62**

$$\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}(X_i\cdot w_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\cdot\frac{f_i}{\sum f_i}\right)=82.62(\text{千克})$$

算数平均数：总结I

算数平均数 $\bar{x}$的几条性质：

- 所有的定量数据都有算术平均数。
- 计算算术平均数时使用了所有数据。
- 一组样本数据只有一个均值。
- 简单算术平均数的大小只与变量值的大小有关。
- 加权算术平均数受各组组中值（变量值）大小，以及各组变量值出现的频数（权数）的影响。

算数平均数：总结2

- 各变量值与均值的离差之和等于零。

> 简单算数平均数： $\sum X_i - \bar{X} = 0$
>
> 加权算数平均数： $\sum [(X_i - \bar{X}) f_i] = 0$

- 各变量值与均值的离差平方和等于最小值。

> 简单算数平均数： $\sum (X_i - \bar{X})^2 = min$
>
> 加权算数平均数： $\sum [(X_i - \bar{X})^2 f_i] = 0$

- 根据原始数据和分组资料计算的结果一般不会完全相等，根据分组数据只能得到近似结果。
- 只有各组数据在组内呈对称或均匀分布时，根据分组资料的计算结果才会与原始数据的计算结果一致。

（示例）算数平均数：未整理数据VS分组整理数据

案例数据：某企业的工会随机调查了50名工人2020年6月加班的小时数，原始数据（左下）和整理数据（右下）结果分别如下：

- 原始未整理数据：

W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	W1(
12	14	23	15	16	24	17	9	12	1:
W18	W19	W20	W21	W22	W23	W24	W25	W26	W2:
5	19	13	10	14	10	11	12	7	1:
W35	W36	W37	W38	W39	W40	W41	W42	W43	W4:
19	18	18	15	13	13	12	14	9	2(

- 简单算数平均数：

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = 15.22$$

- 分组整理数据：

X	Xi	f	Xf
「5,10」	7.5	8	60
(10,15」	12.5	19	238
(15,20」	17.5	16	280
(20,25」	22.5	6	135
(25,30」	27.5	1	28
Total	**87.5**	**50**	**740**

- 加权算数平均数：

$$\bar{X} = \frac{\sum (X_i \cdot f_i)}{\sum f_i} = 14.8$$

调和平均数：概念和形式

调和平均数：以变量值的倒数为基础计算的平均数，即标志值的倒数的平均数的倒数，亦称倒数平均数，一般记为 $\bar{X}_H$。

表现形式：

- 逆向指标的算数平均指标的倒数形式。
- 算术平均指标的变形形式。

调和平均数：计算公式

调和平均数的理论计算公式为：

$$\bar{X} = \frac{\sum(X_i f_i)}{\sum f_i} = \frac{\sum(X_i f_i)}{\sum\left[\frac{(X_i f_i)}{X_i}\right]} = \frac{\sum m_i}{\sum \frac{m_i}{X_i}} = \bar{X}_H$$

其中：

- $m_i = X_i \cdot f_i, f_i = \frac{m_i}{X_i}$。
- m_i是一种特定权数，它不是各组变量值出现的次数，而是各组标志值总量（注意不是“总体标志总量”！！！）。

（示例）调和平均数的应用场景

案例说明：设有一种蔬菜，早、中、晚的价格分别为每千克0.5元、0.2元和0.1元。第一个人早、中、晚各买1千克的菜，第二个人早、中、晚各买1元钱的菜。比较两人所卖菜的平均价格。

$$\text{平均份格} = \frac{\text{购买额}}{\text{购买量}}$$

- 第一个人平均购买价格：

$$\bar{X} = \frac{0.5 + 0.2 + 0.1}{1 + 1 + 1} = 0.267(\text{元})$$

- 第二个人平均购买价格：

$$\bar{X}_H = \frac{1 + 1 + 1}{1/0.5 + 1/0.2 + 1/0.1} = \frac{3}{17} = 0.18(\text{元})$$

调和平均数的计算：主要步骤

简单调和平均数：$\bar{X}_H = \frac{n}{\sum \frac{1}{X_i}}$

加权调和平均数：$\bar{X}_H = \frac{\sum m_i}{\sum \frac{m_i}{X_i}}$

计算步骤：

a. 先计算各个**变量值**的倒数 $\frac{1}{X_i}$。

b. 计算**变量值的倒数**的算数平均数。

简单调和平均数：$\frac{\sum(\frac{1}{X_i})}{n}$

加权调和平均数：$\frac{\sum(\frac{m_i}{X_i})}{\sum m_i}$

c. 再计算**变量值的倒数的算数平均数**的倒数。

简单调和平均数：$\bar{X}_H = \frac{n}{\sum(\frac{1}{X_i})}$

加权调和平均数：$\bar{X}_H = \frac{\sum m_i}{\sum(\frac{m_i}{X_i})}$

（示例）简单调和平均数的计算：未分组数据

1)正向指标情形　2)逆向指标指标情

示例计算1（正向指标情形）：某车间5位工人的劳动生产率（件/小时）资料如下，请分别计算全部工人的平均劳动生产率是多少？

```
W1 W2 W3 W4 W5
10 12 15 20 30
```

- **计算分析：**因为是正向指标，可以直接使用简单算数平均数计算得到。

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{10+12+15+20+30}{5} = \frac{87}{5} = 17.4 \text{ 件 / 小时}$$

（示例）简单调和平均数的计算：未分组数据

1)正向指标情形　2)逆向指标指标情

示例计算2（逆向指标指标情形）：某车间5位工人的劳动生产率（分钟/件）资料如下，请分别计算全部工人的平均劳动生产率是多少？

```
W1 W2 W3 W4 W5
 6  5  4  3  2
```

- **计算分析：**因为是逆向指标，应使用简单调和平均数计算得到。

$$\bar{X}_H = \frac{1}{\frac{\sum 1/X_i}{n}} = \frac{1}{(1/6+1/5+1/4+1/3+1/2)/5} = \frac{1}{1.45/5} = \frac{1}{0.29} = 3.45 \text{ 分钟 /件}$$

（示例）加权调和平均数的计算：分组数据4

案例说明：某公司有四个企业，工作完成程度（ratio_do，%）及计划产值（value_plan）如下，请计算全部四个企业的平均工作完成程度？

firms	ratio_do	value_plan	Xf
甲	90	100	90
乙	100	200	200
丙	110	300	330
丁	120	400	480
Total		**1000**	**1100**

分析过程：此题可以直接使用**加权算术平均数**公式计算。其中：工作完成程度（ratio_do）为正指标 x_i，计划产值（Value_plan）为权重 f_i。

$$\bar{X} = \frac{\sum(X_i f_i)}{\sum f_i} = \frac{1100}{1000} \times 100\% = 110\%$$

（示例）加权调和平均数的计算：分组数据B

案例说明：某公司有四个企业，工作完成程度（ratio_do，%）及实际产值（value_do）如下，请计算全部四个企业的平均工作完成程度？

firms	ratio_do	value_do	1/X	m/X
甲	90	90	1.11	100
乙	100	200	1.00	200
丙	110	330	0.91	300
丁	120	480	0.83	400
Total		**1100**		**1000**

分析过程：此题需要使用**加权调和平均数**公式计算。其中：工作完成程度（ratio_do）为正指标 x_i，实际产值（Value_do）为特殊权重 m_i。

$$\bar{X} == \frac{\sum m_i}{\sum\left(\frac{1}{X_i}m_i\right)} = \frac{1100}{1000} \times 100\% = 110\%$$

调和平均数：总结

- 如果数列中有一标志值等于零，则无法计算调和平均数。
- 较之算术平均数，调和平均数受极端值的影响要小。

几何平均数：概念与类型

几何平均数（Geometric Mean）：对 n 个变量值连乘之积开 n 次方根，主要用于计算平均速度和平均比率。

一般公式：

$$\bar{X}_G = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdots X_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i}$$

适合条件：变量值为相乘关系

计算类型：

- 简单几何平均数
- 加权几何平均数

简单几何平均数的计算

（方法1）直接开根号：

$$\bar{X_G} = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdots X_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i}$$

（方法2）利用反对数求解：

$$\bar{X_G} = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$log(\bar{X_G}) = \frac{1}{n} \cdot log\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (logX_i)$$

$$\bar{X_G} = arclog\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (logX_i)\right) = 10^{\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (logX_i)\right)}$$

（示例）简单几何平均数的计算

案例说明：某地区工业产品产量在2013-2018年间的产量（output，亿吨）和逐年发展速度*（speed，%）。求该地区五年间的平均发展速度是多少？

year	output	speed
2013	9.8	
2014	10.5	108
2015	10.8	102
2016	10.9	101
2017	11.2	103
2018	11.4	102
Total	**64.6**	

（示例）简单几何平均数的计算

解题分析：

- 方法1：对发展速度（speed）直接连乘开根号。
- 方法2：对发展速度（speed）取对数（log_speed），再连加对数，最后求反对数。

year	output	speed	log_speed
2013	9.8	NA	NA
2014	10.5	107.5510	2.0316
2015	10.8	102.4668	2.0106
2016	10.9	100.6481	2.0028
2017	11.2	102.6679	2.0114
2018	11.4	102.2401	2.0096
Total	**64.6**		**10.0661**

$$\begin{aligned}\bar{X_G} &= \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} \\ &= \sqrt[n]{1.1643} \\ &= 103.0889\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{X_G} &= arclog\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(logX_i)\right) \\ &= 10^{\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(logX_i)\right)} = 10^{\left(\frac{1}{5}\cdot 10.0661\right)} \\ &= 103.0889\end{aligned}$$

加权几何平均数的计算

（方法1）直接开根号：

$$\bar{X}_G = \sqrt[(f_1+f_2+\cdots+f_n)]{X_1^{f_1} \cdot X_2^{f_2} \cdots X_n^{f_n}} = \sqrt[\sum_{i=1}^{n} f_i]{\prod_{i=1}^{n} \left(X_i^{f_i}\right)}$$

（方法2）利用反对数求解：

$$\bar{X}_G = \sqrt[\sum f_i]{\prod_{i=1}^{n} \left(X_i^{f_i}\right)}$$

$$log(\bar{X}_G) = \frac{1}{\sum f_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(logX_i^{f_i}\right) = \frac{1}{\sum f_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} (f_i \cdot logX_i)$$

$$\bar{X}_G = arclog\left(\frac{1}{\sum f_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} (f_i \cdot logX_i)\right) = 10^{\left(\frac{1}{\sum f_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} (f_i \cdot logX_i)\right)}$$

（示例）加权几何平均数的计算

案例说明：某投资银行公布了最近25年间（$n=25$）银行年利率的逐年发展速度分组*（speed）和每个分组利率的年数（years）。求该地区25年间的平均发展速度是多少？

speed	years
1.03	1
1.05	4
1.08	8
1.1	10
1.15	2
Total	**25**

（示例）简单几何平均数的计算

解题分析：

- 方法1：对发展速度（speed）进行权重 f_i的幂指数计算，再连乘，最后再开根号。
- 方法2：对发展速度（speed）取对数（log_speed），再乘以对应权重 f_i，然后加总，最后求反对数。

speed	years	power	log_speed	f_log_speed
1.03	1	1.0300	0.0128	0.0128
1.05	4	1.2155	0.0212	0.0848
1.08	8	1.8509	0.0334	0.2674
1.1	10	2.5937	0.0414	0.4139
1.15	2	1.3225	0.0607	0.1214
Total	**25**			**0.9003**

$$\overline{X_{\mathrm{g}}} = \sqrt[\sum_{i=1}^{n} f_i]{\prod_{i=1}^{n}\left(X_i^{f_i}\right)}$$
$$= \sqrt[25]{1.03^{1*}1.05^{4} * 1.08^{8} * 1.10^{10*} + 1.15^{2}}$$
$$= \sqrt[25]{7.9489} = 1.0865$$

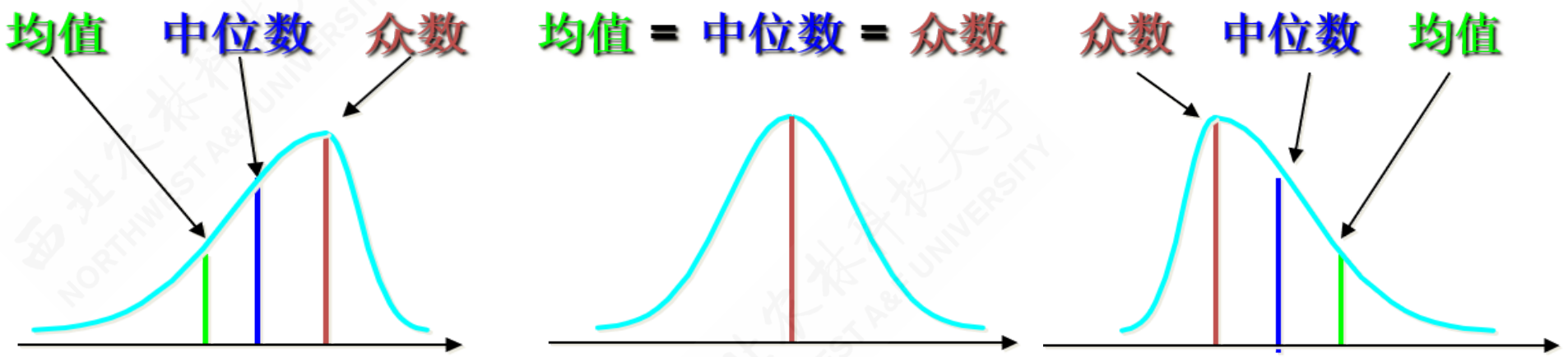
$$\overline{X_G} = arclog\left(\frac{1}{\sum f_i} \cdot \sum_{i=1}^{n}(f_i \cdot logX_i)\right)$$
$$= 10^{\left(\frac{1}{\sum f_i} \cdot \sum_{i=1}^{n}(f_i \cdot logX_i)\right)}$$
$$= 10^{\left(\frac{1}{25} \cdot 0.9003\right)} = 1.0865$$

几何平均数：总结

- 几何平均数 $\bar{x}_G$适用于反映特定现象的平均水平，即现象的总标志值是各单位标志值的连乘积。
- 如果数列中有一个标志值等于零或负值，就无法计算几何平均数 $\bar{x}_G$。
- 受极端值的影响较算数平均数 $\bar{x}$和调和平均数 $\bar{x}_H$小。

平均数：总结I

- 位置平均数和数值平均数的图形关系：



左偏分布

$\overline{X} < M_e < M_o$

对称分布

$\overline{X} = M_e = M_o$

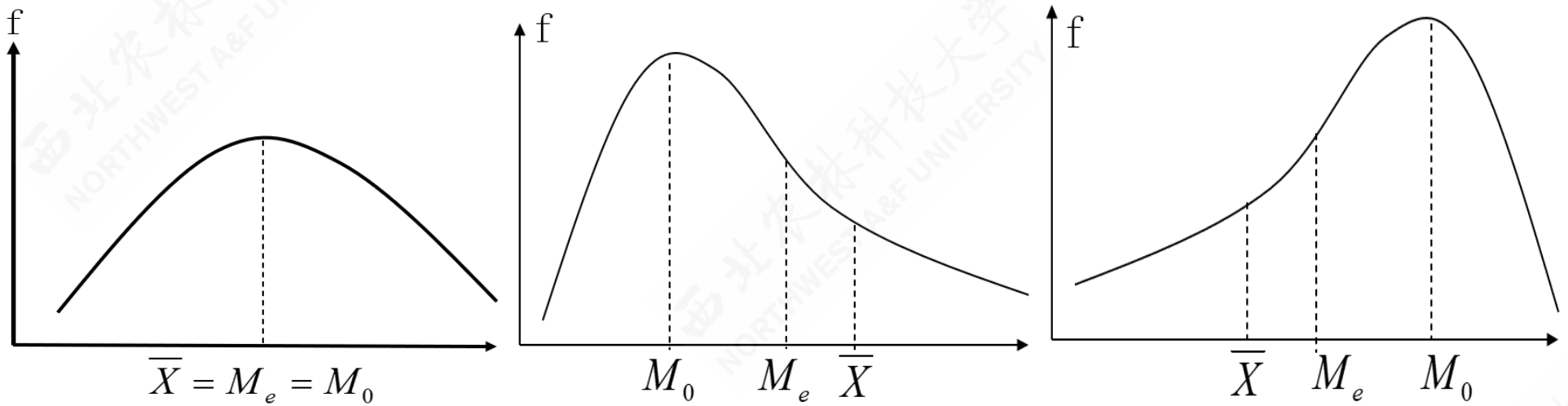
右偏分布

$\overline{X} > M_e > M_o$

平均数：总结2

- 位置平均数和数值平均数的卡尔·皮尔逊经验公式：

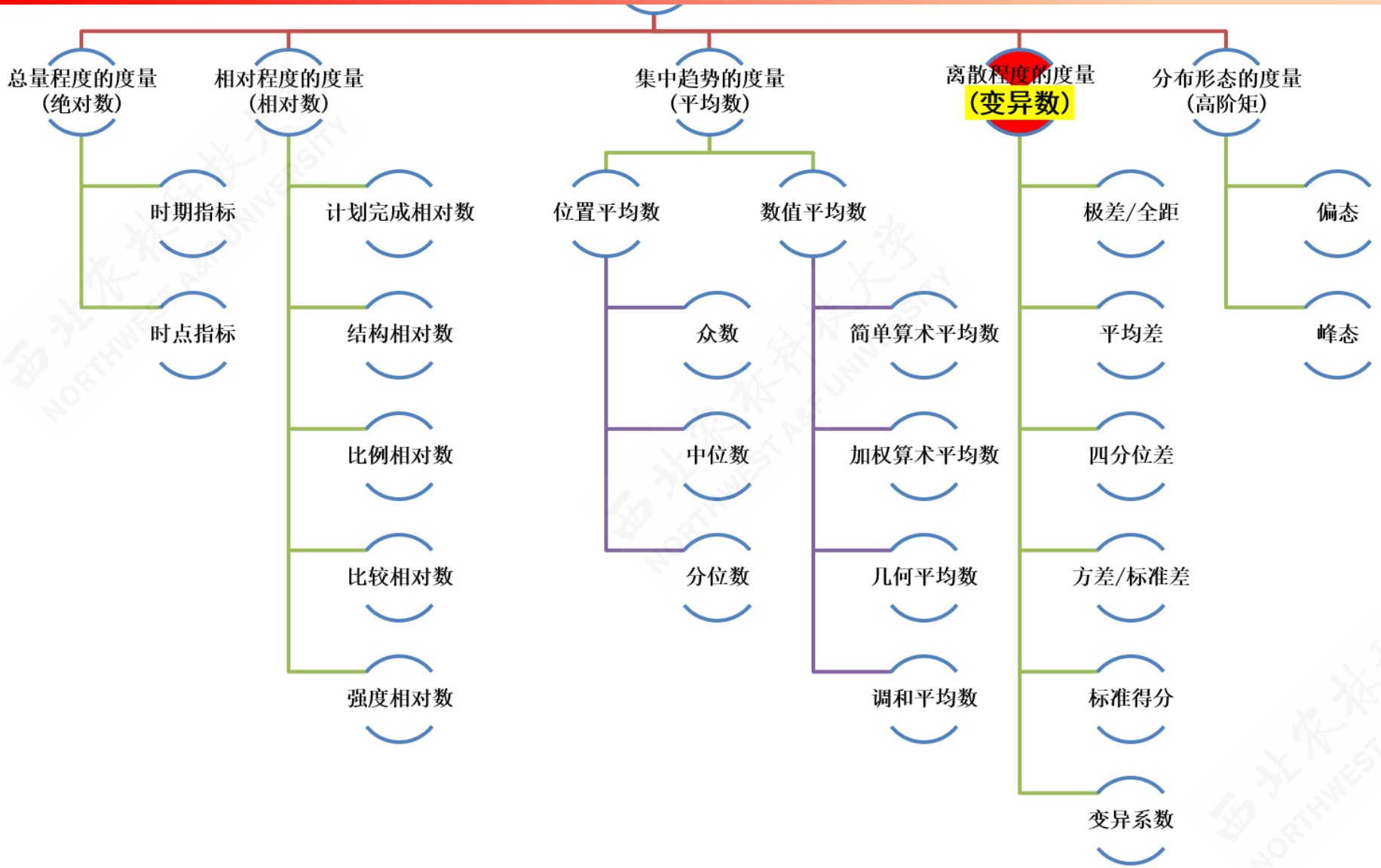
$$|\bar{X} - M_0| = 3\,|\bar{X} - M_e|$$



$$M_0 = 3M_e - 2\bar{X}; \qquad \bar{X} = \frac{1}{2}(3M_e - M_o)\,; \qquad M_e = \frac{1}{3}\left(M_o + 2\bar{X}\right)$$

4.4 离散程度的度量

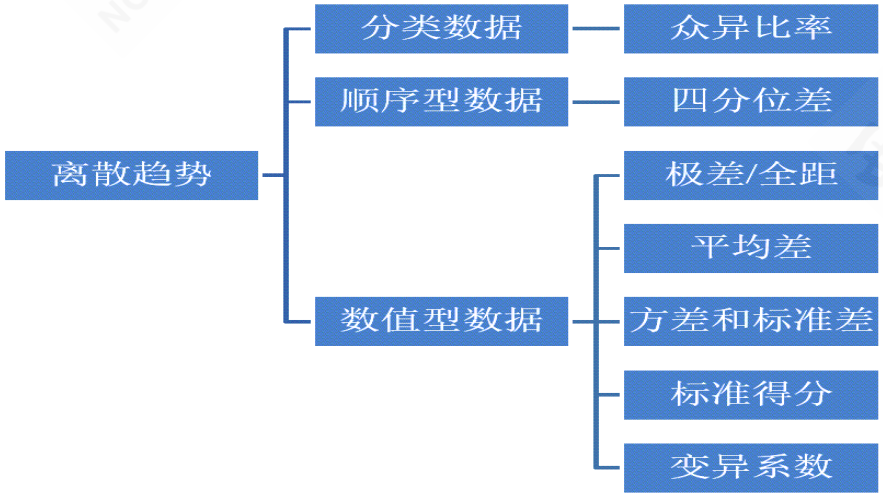
内容导航

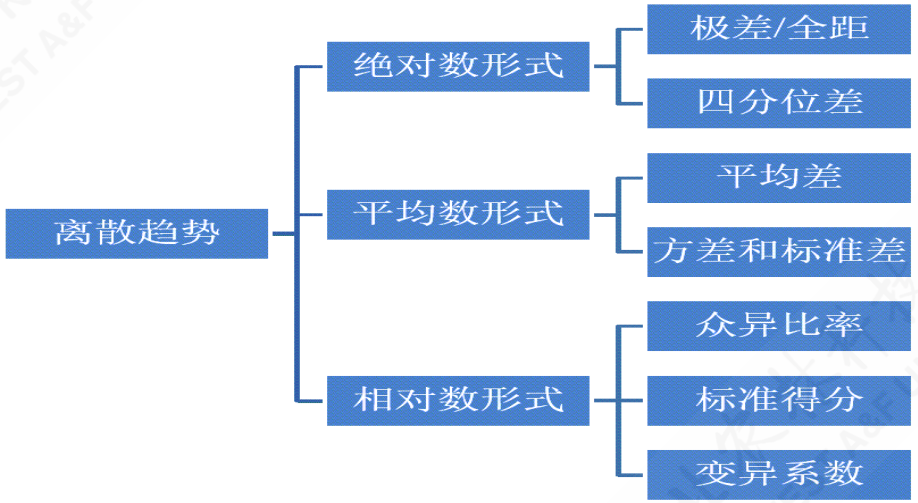

总量程度的度量
(绝对数)
时期指标
时点指标
相对程度的度量
(相对数)
计划完成相对数
结构相对数
比例相对数
比较相对数
强度相对数
集中趋势的度量
(平均数)
位置平均数
众数
中位数
分位数
数值平均数
简单算术平均数
加权算术平均数
几何平均数
调和平均数
离散程度的度量
(变异数)
极差/全距
平均差
四分位差
方差/标准差
标准得分
变异系数
分布形态的度量
(高阶矩)
偏态
峰态

离散趋势概述：概念内涵

离散趋势的具体内涵有：

- 是数据分布的一个重要特征
- 反映各变量值远离其中心值的程度（离散程度）
- 从另一个侧面说明了集中趋势测度值的代表程度
- 不同类型的数据有不同的离散程度测度值





异众比率：概念和特征

异众比率（variation ratio）：是对分类数据离散程度的测度，具体表现为非众数组的频数占总频数的比例，一般记为 V_r。

异众比率的特征：用于衡量众数的代表性

计算公式：

$$V_r = \frac{\sum f_i - f_m}{\sum f_i} = 1 - \frac{f_m}{\sum f_i}$$

（示例）异众比率的计算

案例数据：不同品牌饮料的频数分布如下，请计算该数据集的异众比率是多少

不同品牌饮料的购买分布

brand	n	percent
果汁	6	12%
其他	8	16%
矿泉水	10	20%
绿茶	11	22%
碳酸饮料	15	30%
Total	50	100%

解题分析：

- $$V_r = \frac{\sum f_i - f_m}{\sum f_i} = 1 - \frac{f_m}{\sum f_i} = \frac{50-15}{50} = 1 - \frac{15}{50} = 0.7 = 70\%$$
- 在所调查的50人当中，购买碳酸饮料以外的人数占70%，异众比率比较大。因此，用“碳酸饮料”代表消费者购买饮料品牌的状况，其代表性不是很好。

四分位差：概念和特征

四分位差（quartile deviation）：主要用于对顺序尺度/比率尺度数据离散程度的测度，也称为内距或四分间距，它是上四分位数（四分之三位数）与下四分位数（四分之一位数）之差，一般记为 Q_d：

$$Q_d = Q_3 - Q_1$$

四分位差的特征：

- 反映了中间50%数据的离散程度
- 不受极端值的影响
- 用于衡量中位数的代表性

（示例）四分位差的计算：原始未整理数据

案例数据：某电脑销售公司在4个月120天（$n=120$）的电脑销售台数的数据记录如下，请计算该数据集的**四分位差**是多少？

```
  [1] 234 143 187 161 150 228 153 166
 [17] 161 162 163 196 164 226 165 165
 [33] 215 180 175 196 155 167 168 211
 [49] 172 194 173 196 174 165 175 233
 [65] 153 179 144 179 188 172 181 182
 [81] 237 187 205 188 177 189 209 189
 [97] 163 196 176 196 160 197 197 174
[113] 171 208 192 210 168 211 172 213
```

解题步骤：

- 计算数据集的四分之一位数：

  $Q_1 = 170.75$。

- 计算数据集的四分之三位数：$Q_3 = 197$。

- 最后计算得到四分位差：

  $Q_d = Q_3 - Q_1 = 26.25$

（示例）四分位差的计算：单项式数列

案例数据：甲城市家庭对住房状况评价的频数分布如下，请计算该数据集的四分位差是多少？

甲城市住房满意度评价统计表

lable	satisfication	n	cumsum
1	非常不满意	24	24
2	**不满意**	**108**	**132**
3	**一般**	**93**	**225**
4	满意	45	270
5	非常满意	30	300
	Total	**300**	

解题分析：设非常不满意为1，不满意为2，一般为3，满意为4，非常满意为5。已知：$Q_1 =$ 不满意 $= 2$；$Q_3 =$ 一般 $= 3$。则四分位差为：

$$Q_d = Q_3 - Q_1 = 3 - 2 = 1$$

极差：概念和特征

极差（range）：是一组数据的最大值与最小值之差，一般记为 R，计算公式为：

$$R = Max(X_i) - Min(X_i)$$

极差的特征：

- 离散程度的最简单测度值
- 易受极端值影响
- 未考虑数据的分布

（示例）极差的计算：未整理原始数据

案例数据：某电脑销售公司在4个月120天（$n=120$）的电脑销售台数的数据记录如下，请计算该数据集的**极差**是多少？

```
  [1] 234 143 187 161 150 228 153 166
 [17] 161 162 163 196 164 226 165 165
 [33] 215 180 175 196 155 167 168 211
 [49] 172 194 173 196 174 165 175 233
 [65] 153 179 144 179 188 172 181 182
 [81] 237 187 205 188 177 189 209 189
 [97] 163 196 176 196 160 197 197 174
[113] 171 208 192 210 168 211 172 213
```

解题步骤：

- 先排序数据，找到最小值和最大值。

```
  [1] 141 143 144 149 150 152 153 153
 [17] 161 162 163 163 164 165 165 165
 [33] 172 172 172 172 172 173 173 174
 [49] 177 177 178 178 178 179 179 179
 [65] 186 186 187 187 187 187 188 188
 [81] 194 194 195 195 196 196 196 196
 [97] 203 203 205 206 207 208 209 210
[113] 225 226 228 233 233 234 234 237
```

- 最后计算得到四分位差。

$$R = Max(X_i) - Min(X_i) = 237 - 141 = 96$$

平均差：概念和特征

平均差（mean deviation）：是各变量值与其平均数离差绝对值的平均数，一般记为 M_d。计算公式根据数据情况分为：

- 未分组数据：

$$M_{\mathrm{d}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|}{n}$$

- 组距分组数据：

$$M_{\mathrm{d}}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(|M_i-\bar{X}|\,f_i\right)}{\sum f_i}$$

平均差的特征：

- 能全面反映一组数据的离散程度。
- 数学性质较差，实际中应用较少。

（示例）平均差的计算：原始未整理数据I

案例数据：某电脑销售公司在4个月120天（$n=120$）的电脑销售台数的数据记录如下，请计算该数据集的**四分位差**是多少？

```
  [1] 234 143 187 161 150 228 153 166 154 174 156 203 159 198 160 152
 [17] 161 162 163 196 164 226 165 165 187 141 214 149 178 223 218 179
 [33] 215 180 175 196 155 167 168 211 168 170 180 171 233 172 210 172
 [49] 172 194 173 196 174 165 175 233 175 190 207 176 183 225 178 234
 [65] 153 179 144 179 188 172 181 182 182 177 184 185 186 186 178 187
 [81] 237 187 205 188 177 189 209 189 190 175 191 173 194 189 195 195
 [97] 163 196 176 196 160 197 197 174 198 200 201 202 158 203 188 206
[113] 171 208 192 210 168 211 172 213
```

（示例）平均差的计算：原始未整理数据2

解题步骤：

- 计算数据集的均值：$\bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}=184.57$。
- 计算所有数据的离中心差的绝对值：$|X_i-\bar{X}|$，及其求和项 $\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|=2091.4$。
- 最后利用公式计算得到平均差：

$$M_{\mathrm{d}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|}{n}=\frac{2091.4}{120}=17.43$$

```
  [1] 49.43 41.57  2.43 23.57 34.57 43
 [11] 28.57 18.43 25.57 13.43 24.57 32
 [21] 20.57 41.43 19.57 19.57  2.43 43
 [31] 33.43  5.57 30.43  4.57  9.57 11
 [41] 16.57 14.57  4.57 13.57 48.43 12
 [51] 11.57 11.43 10.57 19.57  9.57 48
 [61]  1.57 40.43  6.57 49.43 31.57  5
 [71]  3.57  2.57  2.57  7.57  0.57  0
 [81] 52.43  2.43 20.43  3.43  7.57  4
 [91]  6.43 11.57  9.43  4.43 10.43 10
[101] 24.57 12.43 12.43 10.57 13.43 15
[111]  3.43 21.43 13.57 23.43  7.43 25
```

（示例）平均差的计算：组距分组数据I

案例数据：A同学将某电脑销售公司在4个月120天（$n=120$）的电脑销售台数的原始数据，并进行如下的组距式分组统计。其中f表示落在各组的天数。请计算该数据集的**平均差**是多少？

index	groups	f
1	[140,150)	4
2	[150,160)	9
3	[160,170)	16
4	[170,180)	27
5	[180,190)	20
6	[190,200)	17
7	[200,210)	10
8	[210,220)	8
9	[220,230)	4
10	[230,240]	5

（示例）平均差的计算：组距分组数据2

解题步骤：具体计算表见下一页ppt。

- 计算各组组中值M：M_i，以及组中值与权重的乘积Mf：$M_i f_i$。然后计算得出均值：$\bar{X} = \frac{\sum M_i f_i}{\sum f_i} = 185$。
- 计算得到离中心差demean：$M_i - \bar{X}$，及其绝对值abs_demean $|M_i - \bar{X}|$。
- 计算离中心差与权重的乘积demean_f：$(M_i - \bar{X}) f_i$，及其绝对值abs_demean_f：$|(M_i - \bar{X})| f_i$
- 最后，利用公式计算加总项，进一步计算得到平均差。

$$M_{\mathrm{d}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(|M_i - \bar{X}| \, f_i \right)}{\sum f_i} = \frac{2040}{120} = 17$$

- 含义：与销售量平均数相比，日销售量之间平均相差17台。

（示例）平均差的计算：组距分组数据3

平均差计算需要用到计算表

index	groups	M	f	Mf	demean	abs_demean	demean_f	abs_demean_f
1	[140,150)	145	4	580	-40	40	-160	160
2	[150,160)	155	9	1395	-30	30	-270	270
3	[160,170)	165	16	2640	-20	20	-320	320
4	[170,180)	175	27	4725	-10	10	-270	270
5	[180,190)	185	20	3700	0	0	0	0
6	[190,200)	195	17	3315	10	10	170	170
7	[200,210)	205	10	2050	20	20	200	200
8	[210,220)	215	8	1720	30	30	240	240
9	[220,230)	225	4	900	40	40	160	160
10	[230,240]	235	5	1175	50	50	250	250
Total	-	1900	120	22200	50	250	0	2040

方差和标准差：概念和特征

方差（variance）和标准差（standard deviation）：是数据离散程度的最常用测度指标，反映了各变量值与均值的平均差异。

- 根据总体数据计算的，称为总体方差（记为 σ^2）以及总体标准差（记为 σ^2）。
- 根据样本数据计算的，称为样本方差（记为 S^2）以及样本标准差（记为 S）。
- 对于未整理原始样本数据：

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

- 对于组距式分组样本数据：

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left((M_i - \bar{X})^2 f_i\right)}{n-1}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\left((M_i - \bar{X})^2 f_i\right)}{n-1}}$$

（示例）计算：原始未整理数据I

案例数据：某电脑销售公司在4个月120天（$n=120$）的电脑销售台数的数据记录如下，请计算该数据集的**样本方差**和**样本标准差**分别是多少？

```
  [1] 234 143 187 161 150 228 153 166 154 174 156 203 159 198 160 152
 [17] 161 162 163 196 164 226 165 165 187 141 214 149 178 223 218 179
 [33] 215 180 175 196 155 167 168 211 168 170 180 171 233 172 210 172
 [49] 172 194 173 196 174 165 175 233 175 190 207 176 183 225 178 234
 [65] 153 179 144 179 188 172 181 182 182 177 184 185 186 186 178 187
 [81] 237 187 205 188 177 189 209 189 190 175 191 173 194 189 195 195
 [97] 163 196 176 196 160 197 197 174 198 200 201 202 158 203 188 206
[113] 171 208 192 210 168 211 172 213
```

（示例）计算：原始未整理数据2

解题步骤：

- 计算数据集的均值： $\bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}=184.57$。
- 计算所有数据的离中心差： $X_i-\bar{X}$，及其平方项 $(X_i-\bar{X})^2$。
- 计算离中心差平方项的求和项 $\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\bar{X})^2\right)=55935.47$。
- 最后利用公式计算得到样本方差和样本标准差：

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}=\frac{55935.47}{119}=470.0459$$

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{55935.47}{119}}=21.6805$$

- 含义：日销售量平均数为185台，日销售量与平均数之间的一个标准差为22台。

（示例）计算：组距分组数据I

案例数据：A同学将某电脑销售公司在4个月120天（$n=120$）的电脑销售台数的原始数据，并进行如下的组距式分组统计。其中f表示各组的天数。请计算该数据集的**样本方差**和**样本标准**分别是多少？

index	groups	f
1	[140,150)	4
2	[150,160)	9
3	[160,170)	16
4	[170,180)	27
5	[180,190)	20
6	[190,200)	17
7	[200,210)	10
8	[210,220)	8
9	[220,230)	4
10	[230,240]	5

（示例）计算：组距分组数据2

解题步骤：具体计算表见下一页ppt。

- 计算各组组中值M：M_i，以及组中值与权重的乘积Mf：$M_i f_i$。然后计算得出分组数据的均值：$\bar{X} = \frac{\sum M_i f_i}{\sum f_i} = 185$。
- 计算得到离中心差demean：$M_i - \bar{X}$，以及离中心差的平方项power2：$(X_i - \bar{X})^2 f_i$，再计算离中心差平方项与权重的乘积power2_f：$(X_i - \bar{X})^2 f_i$，然后得到求和项 $\sum_{i=1}^{n} \left((M_i - \bar{X})^2 f_i\right) = 55400$。
- 最后利用公式计算得到样本方差和样本标准差：

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left((M_i - \bar{X})^2 f_i\right)}{n-1} = \frac{55400}{119} = 465.5462$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left((M_i - \bar{X})^2 f_i\right)}{n-1}} = \sqrt{\frac{55400}{119}} = 21.5765$$

- 含义：日销售量平均数为185台，日销售量与平均数之间的一个标准差为22台。

（示例）计算：组距分组数据3

方差/标准差计算需要用到计算表

index	groups	M	f	Mf	demean	power2	power2_f
1	[140,150)	145	4	580	-40	1600	6400
2	[150,160)	155	9	1395	-30	900	8100
3	[160,170)	165	16	2640	-20	400	6400
4	[170,180)	175	27	4725	-10	100	2700
5	[180,190)	185	20	3700	0	0	0
6	[190,200)	195	17	3315	10	100	1700
7	[200,210)	205	10	2050	20	400	4000
8	[210,220)	215	8	1720	30	900	7200
9	[220,230)	225	4	900	40	1600	6400
10	[230,240]	235	5	1175	50	2500	12500
Total	-	1900	120	22200	50	8500	55400

标准分数

标准分数（standard score）：也称标准化值，记为 z_i，计算公式为：

$$Z_i = \frac{(X_i - \bar{X})}{S_X}$$

标准分数的特征：

- 对某一个值在一组数据中相对位置的度量。
- 可用于判断一组数据是否有离群点(outlier)。
- 用于对变量的标准化处理。

标准化值 z_i只是将原始数据 x_i进行了线性变换，它并没有改变一个数据在该组数据中的位置，也没有改变该组数分布的形状，而只是使该组数据均值为0，标准差为1。因此也被称为**标准化变换**。

变异系数：概念和作用

变异系数（coefficient of variation）：是用相对数表示的变异指标，又称**标志变动系数**。根据分子的不同，又具体分为：

- 全距变异系数：$V_R = \frac{R}{\bar{X}}$
- 平均差变异系数：$V_{AD} = \frac{R}{\bar{X}}$
- 标准差变异系数：$V_S = \frac{S}{\bar{X}}$

变异系数的作用：抽象掉标志值大小及计量单位的影响。

（示例1）计算几类变异系数

案例情况　　解题分析

案例数据：某电脑销售公司在4个月120天（$n=120$）的电脑销售台数的数据记录如下，请计算该数据集的**全距变异系数、平均差变异系数和标准差变异系数**分别是多少？

```
  [1] 234 143 187 161 150 228 153 166 154 174 156 203 159 198 160 152
 [17] 161 162 163 196 164 226 165 165 187 141 214 149 178 223 218 179
 [33] 215 180 175 196 155 167 168 211 168 170 180 171 233 172 210 172
 [49] 172 194 173 196 174 165 175 233 175 190 207 176 183 225 178 234
 [65] 153 179 144 179 188 172 181 182 182 177 184 185 186 186 178 187
 [81] 237 187 205 188 177 189 209 189 190 175 191 173 194 189 195 195
 [97] 163 196 176 196 160 197 197 174 198 200 201 202 158 203 188 206
[113] 171 208 192 210 168 211 172 213
```

（示例1）计算几类变异系数

案例情况　　解题分析

根据前面已经得到的相关结算结果：数据集的均值 $\bar{X}=184.57$；全距 $R=96$；平均差 $AD=17.43$；样本标准差 $S=21.68$。

然后，利用公式分别计算得到几类变异系数：

- 全距变异系数： $V_R=\frac{R}{\bar{X}}=\frac{96}{184.57}=0.5201$
- 平均差变异系数： $V_{AD}=\frac{R}{\bar{X}}=\frac{17.43}{184.57}=0.0944$
- 标准差变异系数： $V_S=\frac{S}{\bar{X}}=\frac{21.68}{184.57}=0.1175$

（示例2）计算标准差变异系数

案例情况　　解题分析

案例数据：某工厂有甲、乙两个工人小组，每个小组各有10个工人，两个小组的日产量数据分别如下。请你通过一些计算，比较那个小组的产量更稳定？

- 甲组工人的日产量（件/天）数据：

```
[1] 68 68 68 62 61 59 69 85 72 83
```

- 乙组工人的日产量（件/天）数据：

```
[1] 16 15 17 22 12 18 23 20 21 15
```

（示例2）计算标准差变异系数

案例情况　　解题分析

- 甲组工人产量均值 $\bar{X}_{甲}=\frac{\sum X_i}{n}=69.5$；产量标准差 $S_{甲}=\sqrt{\frac{\sum(X_i-\bar{X}^2)}{n-1}}=8.66$。
- 乙组工人产量均值 $\bar{X}_{乙}=\frac{\sum X_i}{n}=17.9$；产量标准差 $S_{乙}=\sqrt{\frac{\sum(X_i-\bar{X}^2)}{n-1}}=3.54$。

显然，从标准差来看甲组离散程度大于乙组 $S_{甲}>S_{乙}$，但是单纯从标准差大小来断定工人产量稳定性，是不恰当的。因为我们还可以看到，甲组的均值也高于乙组 $\bar{X}_{甲}>\bar{X}_{乙}$。

因此，我们需要进一步计算标准差变异系数指标来加以比较。可以发现，甲组要更优。

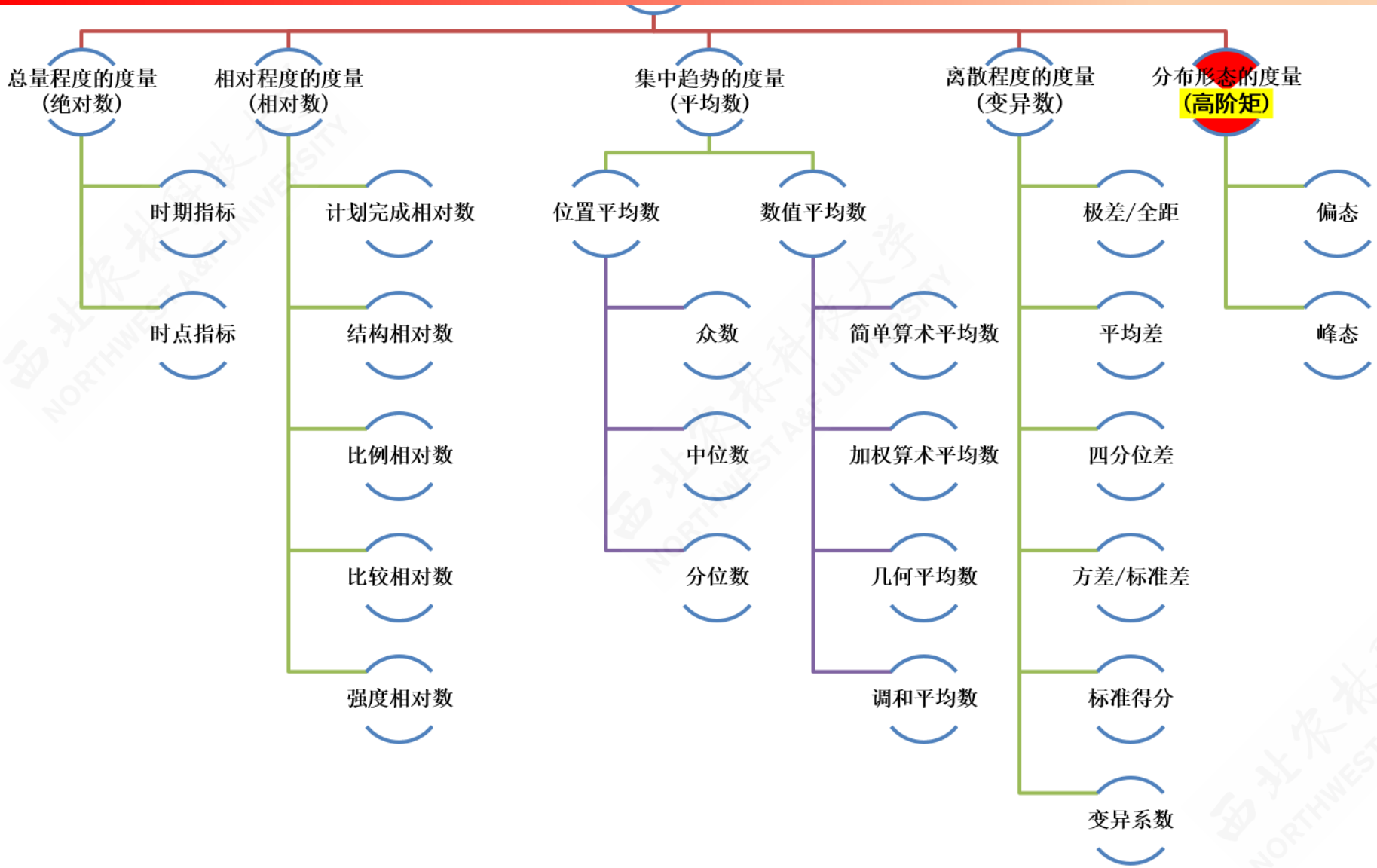
$$V_{S甲}=\frac{S_{甲}}{\bar{X}_{甲}}=0.1246<V_{S乙}=\frac{S乙}{\bar{X}_{乙}}=0.1979$$

4.5 分布形态的度量

偏态及其测度

峰态及其测度

内容导航


总量程度的度量
(绝对数)
时期指标
时点指标
相对程度的度量
(相对数)
计划完成相对数
结构相对数
比例相对数
比较相对数
强度相对数
集中趋势的度量
(平均数)
位置平均数
众数
中位数
分位数
数值平均数
简单算术平均数
加权算术平均数
几何平均数
调和平均数
离散程度的度量
(变异数)
极差/全距
平均差
四分位差
方差/标准差
标准得分
变异系数
分布形态的度量
(高阶矩)
偏态
峰态

偏态及其测度

偏态（skewness）：对数据分布偏斜程度的测度*。

偏态系数SK的特征：

- $SK=0$为对称分布
- $SK>0$为右偏分布
- $SK<0$为左偏分布
- $|SK|>1$，被称为高度偏态分布；
- $0.5<|SK|\leq 1$，被认为是中等偏态分布；
- $SK\simeq 0$，偏斜程度就越低 。

注释：* 具体定义和计算公式可以参看 第03章 3.3节内容。

偏态系数的计算

- 根据原始数据计算：

$$SK = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^3}{S_X^3}$$

- 根据分组数据计算：

$$SK = \frac{1}{\sum f_i} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}\left((M_i - \bar{X})^3 \cdot f_i\right)}{S_X^3}$$

> 其中：n表示总次数；f_i表示各组次数；M_i表示各组组中值；S_X表示样本标准差 $S_X = \sqrt{\frac{\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$。

（示例）偏态系数的计算：未分组原始数据I

案例数据：某电脑销售公司在4个月120天（$n=120$）的电脑销售台数的数据记录如下，请计算该数据集的**偏度系数**SK是多少？

```
  [1] 234 143 187 161 150 228 153 166 154 174 156 203 159 198 160 152
 [17] 161 162 163 196 164 226 165 165 187 141 214 149 178 223 218 179
 [33] 215 180 175 196 155 167 168 211 168 170 180 171 233 172 210 172
 [49] 172 194 173 196 174 165 175 233 175 190 207 176 183 225 178 234
 [65] 153 179 144 179 188 172 181 182 182 177 184 185 186 186 178 187
 [81] 237 187 205 188 177 189 209 189 190 175 191 173 194 189 195 195
 [97] 163 196 176 196 160 197 197 174 198 200 201 202 158 203 188 206
[113] 171 208 192 210 168 211 172 213
```

（示例）偏态系数的计算：未分组原始数据2

解题步骤：

- 计算数据的均值 $\bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}=184.5667$。
- 计算数据的样本标准差 $S_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}=21.6805$。
- 利用公式计算得出偏度系数SK。

$$SK=\frac{n}{(n-1)(n-2)}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^3}{S_X^3}=\frac{120}{(119\times 118)}\frac{540000}{10044.87}=0.4002$$

（示例）偏态系数的计算：分组后组距式数据

案例数据：A同学将某电脑销售公司在4个月120天（$n=120$）的电脑销售台数的原始数据（见前例），并进行如下的组距式分组统计。其中f表示落在各组的天数。请计算所有数据的**偏度系数**SK是多少？

index	groups	f
1	[140,150)	4
2	[150,160)	9
3	[160,170)	16
4	[170,180)	27
5	[180,190)	20
6	[190,200)	17
7	[200,210)	10
8	[210,220)	8
9	[220,230)	4
10	[230,240]	5

（示例）偏态系数的计算：分组后组距式数据

解题步骤：具体计算表见下一页ppt。

- 计算各组组中值M：M_i，然后计算得出均值：$\bar{X}=\frac{\sum M_i f_i}{\sum f_i}=185$。
- 计算得到离中心差demean：$M_i-\bar{X}$。
- 对离中心差分别计算2次方项power2：$(M_i-\bar{X})^2$和3次方项power3：$(M_i-\bar{X})^3$。以及各自幂指数项与权重f的乘积，power2_f：$(M_i-\bar{X})^2 f_i$和3次方项power3_f：$(M_i-\bar{X})^3 f_i$。
- 分别进行行汇总，得到各项的加总项。
- 计算出分组后数据的样本标准差 $S_X=\sqrt{\frac{\sum_1^n (M_i-\bar{X})^2}{n-1}}$
- 最后，利用公式进一步计算得到偏度系数SK。

$$SK=\frac{1}{\sum f_i}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\left((M_i-\bar{X})^3\cdot f_i\right)}{S_X^3}=\frac{1}{120}\cdot\frac{540000}{10044.8673}=0.4480$$

（示例）偏态系数的计算：分组后组距式数据

偏态系数计算需要用到计算表

index	groups	f	M	Mf	demean	power2	power2_f	power3	power3_f
1	[140,150)	4	145	580	-40	1600	6400	-64000	-256000
2	[150,160)	9	155	1395	-30	900	8100	-27000	-243000
3	[160,170)	16	165	2640	-20	400	6400	-8000	-128000
4	[170,180)	27	175	4725	-10	100	2700	-1000	-27000
5	[180,190)	20	185	3700	0	0	0	0	0
6	[190,200)	17	195	3315	10	100	1700	1000	17000
7	[200,210)	10	205	2050	20	400	4000	8000	80000
8	[210,220)	8	215	1720	30	900	7200	27000	216000
9	[220,230)	4	225	900	40	1600	6400	64000	256000
10	[230,240]	5	235	1175	50	2500	12500	125000	625000
Total	-	120	1900	22200	50	8500	55400	125000	540000

峰态系数的计算

- 根据原始数据计算：

$$KT=\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^4}{S_X^4}-\frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

- 根据分组数据计算：

$$KT=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left((M_i-\bar{X})^4\cdot f_i\right)}{(\sum f_i)\cdot S_X^4}$$

> 其中：n表示总次数；f_i表示各组次数；M_i表示各组组中值；S_X表示样本标准差 $S_X=\sqrt{\frac{\sum_1^n(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$。

（示例）峰态系数的计算：未分组原始数据I

案例数据（同前）：某电脑销售公司在4个月120天（$n=120$）的电脑销售台数的数据记录如下，请计算该数据集的**峰度系数**KT是多少？

```
  [1] 234 143 187 161 150 228 153 166 154 174 156 203 159 198 160 152
 [17] 161 162 163 196 164 226 165 165 187 141 214 149 178 223 218 179
 [33] 215 180 175 196 155 167 168 211 168 170 180 171 233 172 210 172
 [49] 172 194 173 196 174 165 175 233 175 190 207 176 183 225 178 234
 [65] 153 179 144 179 188 172 181 182 182 177 184 185 186 186 178 187
 [81] 237 187 205 188 177 189 209 189 190 175 191 173 194 189 195 195
 [97] 163 196 176 196 160 197 197 174 198 200 201 202 158 203 188 206
[113] 171 208 192 210 168 211 172 213
```

（示例）峰态系数的计算：未分组原始数据I

解题步骤：

- 计算数据的均值 $\bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}=184.5667$。
- 计算数据的样本标准差 $S_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}=21.6805$。
- 利用公式计算得出峰度系数KT。

$$
\begin{aligned}
KT &= \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^4}{S_X^4}-\frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \\
&= \frac{120\times 121}{(119\times 118\times 117)}\frac{70100000}{216733.28}-\frac{3\times 119^2}{118\times 117}=2.7353
\end{aligned}
$$

（示例）峰态系数的计算：分组后组距式数据

案例数据：A同学将某电脑销售公司在4个月120天（$n=120$）的电脑销售台数的原始数据（见前例），并进行如下的组距式分组统计。其中f表示落在各组的天数。请计算所有数据的**峰态系数**KT是多少？

index	groups	f
1	[140,150)	4
2	[150,160)	9
3	[160,170)	16
4	[170,180)	27
5	[180,190)	20
6	[190,200)	17
7	[200,210)	10
8	[210,220)	8
9	[220,230)	4
10	[230,240]	5

（示例）峰态系数的计算：分组后组距式数据

解题步骤：具体计算表见下一页ppt。

- 计算各组组中值M：M_i，然后计算得出均值：$\bar{X}=\frac{\sum M_i f_i}{\sum f_i}=185$。
- 计算得到离中心差demean：$M_i-\bar{X}$。对离中心差分别计算2次方项power2：$(M_i-\bar{X})^2$和4次方项power4：$(M_i-\bar{X})^4$。以及各自幂指数项与权重f的乘积，power2_f：$(M_i-\bar{X})^2 f_i$和4次方项power4_f：$(M_i-\bar{X})^4 f_i$。
- 分别进行行汇总，得到各项的加总项。计算出分组后数据的样本标准差 $S_X=\sqrt{\frac{\sum_1^n (M_i-\bar{X})^2}{n-1}}$
- 最后，利用公式进一步计算得到峰度系数KT。

$$SK=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left((M_i-\bar{X})^4\cdot f_i\right)}{(\sum f_i)\cdot S_X^4}=\frac{1}{120}\cdot\frac{70100000}{216733.2815}=2.6953$$

（示例）峰态系数的计算：分组后组距式数据

峰态系数计算需要用到计算表

index	groups	f	M	Mf	demean	power2	power2_f	power4	power4_f
1	[140,150)	4	145	580	-40	1600	6400	2560000	10240000
2	[150,160)	9	155	1395	-30	900	8100	810000	7290000
3	[160,170)	16	165	2640	-20	400	6400	160000	2560000
4	[170,180)	27	175	4725	-10	100	2700	10000	270000
5	[180,190)	20	185	3700	0	0	0	0	0
6	[190,200)	17	195	3315	10	100	1700	10000	170000
7	[200,210)	10	205	2050	20	400	4000	160000	1600000
8	[210,220)	8	215	1720	30	900	7200	810000	6480000
9	[220,230)	4	225	900	40	1600	6400	2560000	10240000
10	[230,240]	5	235	1175	50	2500	12500	6250000	31250000
Total	-	120	1900	22200	50	8500	55400	13330000	70100000

本章结束