统计学原理(Statistic)

胡华平

西北农林科技大学

经济管理学院数量经济教研室

huhuaping01@hotmail.com

2021-05-16

第五章 相关和回归分析

5.4 假设检验

两种检验方法

回归系数t检验

方差分解（ANOVA）

模型整体显著性F检验

假设检验：原理和思路

假设检验（Hypothesis Testing）：某一给定的观测或发现与某声称的假设是否相符？进行统计假设检验，就是要制定一套步骤和规则，以使决定接受或拒绝一个虚拟假设（原假设）。

虚拟假设(null hypothesis) H_0

- 指定或声称的假设，如 $H_0 : \beta_2 = 0$
- 它是一个等待被挑战的“靶子”！“稻草人”！

备择假设(alter hypothesis) H_1

- 简单备择假设 $H_1 : \beta_2 = 1.5$
- 复合备择假设 $H_1 : \beta_2 \neq 1.5$

假设检验的具体方法：

- 置信区间检验（confidence interval）
- 显著性检验（test of significance）

课堂讨论：参数的置信区间检验和显著性检验有什么区别和联系？

假设检验：置信区间检验法（双侧检验）

双侧或双尾检验（Two-sided or Two-Tail Test）

$$H_0: \beta_2 = 0; \quad H_1: \beta_2 \neq 0$$

- 假设检验目的：估计的是否与上述相容?
- 决策规则：
    - 构造一个 β_2的 $100(1-\alpha)\%$置信区间。
    - 如果 β_2在 H_0假设下落入此区间，就不拒绝 H_0。
    - 如果它落在此区间之外，就要拒绝 H_0。

（示例）教育程度与时均工资回归

对于斜率参数 β_2的置信区间检验法。

- 步骤1：给出模型，并提出假设：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$H_0 : \beta_2 = 0.5; \quad H_1 : \beta_2 \neq 0.5$$

- 步骤2：给定 $\alpha = 0.05, \quad (1-\alpha)100\% = 95\%$
- 步骤3：根据前述计算结果，计算斜率参数 β_2的95%置信区间为：

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 - t_{\alpha/2} \cdot S_{\hat{\beta}_2} \quad &\leq \beta_2 \leq \quad \hat{\beta}_2 + t_{\alpha/2} \cdot S_{\hat{\beta}_2} \\ 0.5709 \quad &\leq \beta_2 \quad \leq 0.8772 \end{aligned}$$

- 步骤4：那么我们可以对斜率参数 β_2做出如下检验判断：拒绝原假设 H_0，接受 H_1。认为，长期来看很多个区间［0.5709,0.8772］有95%的可能性不包含0.5（ $\beta_2 \neq 0.5$）。

（示例）教育程度与时均工资回归

对于截距参数 β_1的置信区间检验法。

- 步骤1：给出模型，并提出假设：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$H_0: \beta_1 = 0; \quad H_1: \beta_1 \neq 0$$

- 步骤2：给定 $\alpha = 0.05, \quad (1-\alpha)100\% = 95\%$
- 步骤3：根据前述计算结果，计算截距参数 β_1的95%置信区间为：

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2} \cdot S_{\hat{\beta}_1} \quad &\leq \beta_1 \leq \quad \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2} \cdot S_{\hat{\beta}_1} \\ -1.9395 \quad &\leq \beta_1 \quad \leq 1.9106 \end{aligned}$$

- 步骤4：那么我们可以对截距参数 β_1做出如下检验判断：
  - 不能拒绝原假设 H_0，暂时接受 H_0。认为，长期来看很多个区间[-1.9395, 1.9106]有95%的可能性包含0（ $\beta_1 = 0$）。

假设检验：显著性检验法

显著性检验方法(test-of-significance approach)：是一种用样本结果来证实 H_0真伪的检验程序。

关键思路：

- 找到一个适合的检验统计量(test statistic) 。例如t统计量 χ^2统计量、F统计量等。
- 知道该统计量在 H_0下的抽样分布(pdf)。往往与待检验参数有关系。
- 计算样本统计量的值。也即能用样本数据快速计算出来，例如 $t^*_{\hat{\beta}_2}=\frac{\hat{\beta}_2}{S_{\hat{\beta}_2}}$。
- 查表找出给定显著性水平 α下的理论统计量的临界值。例如 $t_{1-\alpha/2}(n-2)=t_{0.975}(11)=$ 2.2010
- 比较样本统计量值和该临界值的大小。例如，比较 $t^*_{\hat{\beta}_2}$ 与 $t_{0.975}(11)$
- 做出拒绝还是接受 H_0的判断。

假设检验：截距参数的t检验

对于截距参数 β_1的显著性检验（t检验）。

- 步骤1：给出模型，并提出假设：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$H_0 : \beta_1 = 0; \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$$

- 步骤2：构造合适的检验统计量

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S_{\hat{\beta}_1}} \qquad \leftarrow T \sim t(n-2)$$

假设检验：截距参数的t检验

- 步骤3：基于原假设 H_0计算出样本统计量。

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S_{\hat{\beta}_1}} && \leftarrow T \sim t(n-2) \\
t^*_{\hat{\beta}_1} &= \frac{\hat{\beta}_1}{S_{\hat{\beta}_1}} && \leftarrow H_0 : \beta_1 = 0 \\
t^*_{\hat{\beta}_1} &= \frac{-0.0145}{0.8746} = -0.0165
\end{aligned}
$$

- 步骤4：给定显著性水平 $\alpha = 0.05$下，查出统计量的理论分布值。

> $t_{1-\alpha/2}(n-2) = t_{1-0.05/2}(13-2) = t_{0.975}(11) =$ 2.2010

假设检验：截距参数的t检验

- 步骤5：得到显著性检验的判断结论。
  - 若 $|t^*_{\hat{\beta}_1}| > t_{1-\alpha/2}(n-2)$，则 β_1的t检验结果显著。换言之，在显著性水平 $\alpha = 0.05$下，应显著地拒绝原假设 H_0，接受备择假设 H_1，认为截距参数 $\beta_1 \neq 0$。
  - 若 $|t^*_{\hat{\beta}_1}| < t_{1-\alpha/2}(n-2)$，则 β_1的t检验结果不显著。换言之，在显著性水平 $\alpha = 0.05$下，不能显著地拒绝原假设 H_0，只能暂时接受原假设 H_0，认为截距参数 $\beta_1 = 0$。

本例中， $|t^*_{\hat{\beta}_1}| =$ 0.0165 小于 $t_{0.975}(11) =$ 2.2010。因此，认为 β_1的t检验结果不显著。

换言之，在显著性水平 $\alpha = 0.05$下，不能显著地拒绝原假设 H_0，只能暂时接受原假设 H_0，认为截距参数 $\beta_1 = 0$。

假设检验：斜率参数的t检验

对于斜率参数 β_2的显著性检验（t检验）。

- 步骤1：给出模型，并提出假设：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$H_0 : \beta_2 = 0; \quad H_1 : \beta_2 \neq 0$$

- 步骤2：构造合适的检验统计量

$$T = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{S_{\beta_2}} \qquad \leftarrow T \sim t(n-2)$$

假设检验：斜率参数的t检验

- 步骤3：基于原假设 H_0计算出样本统计量。

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{S_{\hat{\beta}_2}} && \leftarrow T \sim t(n-2) \\
t^*_{\hat{\beta}_2} &= \frac{\hat{\beta}_2}{S_{\hat{\beta}_2}} && \leftarrow H_0 : \beta_2 = 0 \\
t^*_{\hat{\beta}_2} &= \frac{0.7241}{0.0696} = 10.4064 &&
\end{aligned}
$$

- 步骤4：给定显著性水平 $\alpha = 0.05$下，查出统计量的理论分布值。

> $t_{1-\alpha/2}(n-2) = t_{1-0.05/2}(13-2) = t_{0.975}(11) = 2.2010$

假设检验：斜率参数的t检验

- 步骤5：得到显著性检验的判断结论。
  - 若 $|t^*_{\hat{\beta}_2}| > t_{1-\alpha/2}(n-2)$，则 β_2的t检验结果显著。换言之，在显著性水平 $\alpha = 0.05$下，应显著地拒绝原假设 H_0，接受备择假设 H_1，认为斜率参数 $\beta_2 \neq 0$。
  - 若 $|t^*_{\hat{\beta}_2}| < t_{1-\alpha/2}(n-2)$，则 β_2的t检验结果不显著。换言之，在显著性水平 $\alpha = 0.05$下，不能显著地拒绝原假设 H_0，只能暂时接受原假设 H_0，认为斜率参数 $\beta_2 = 0$。

本例中，$|t^*_{\hat{\beta}_2}| =$ 10.4064 大于 $t_{0.975}(11) =$ 2.2010。因此，认为 β_2的t检验结果显著。

换言之，在显著性水平 $\alpha = 0.05$下，应显著地拒绝原假设 H_0，接受备择假设 H_1，认为斜率参数 $\beta_2 \neq 0$。

假设检验：显著性水平VS显著性概率

我们可以回顾犯错误类型：

- 第I类错误：弃真错误 $\alpha = P(Z > Z_0 | H_0 = True)$
- 第II类错误：取伪错误 $\beta = P(Z \leq Z_0 | H_1 = True)$
- [给定样本容量时]如果我们要减少犯第I 类错误， 第II类错误就要增加；反之亦然。

为什么选择显著性水平 α通常固定在0.01、0.05、0.1水平上？

- 约定而已，并非神圣不可改变！
- 如何改变？？

假设检验：显著性水平VS显著性概率

精确的显著性概率水平p值：

- 对给定的样本算出一个检验统计量(如t统计量)，查到与之对应的概率：p值(p value)或概率值(probability value)
- 不约定 α，而是直接求出犯错误概率p值，由读者自己去评判犯错误的可能性和代价！！因人而异！！

假设检验：实际操作中的若干问题

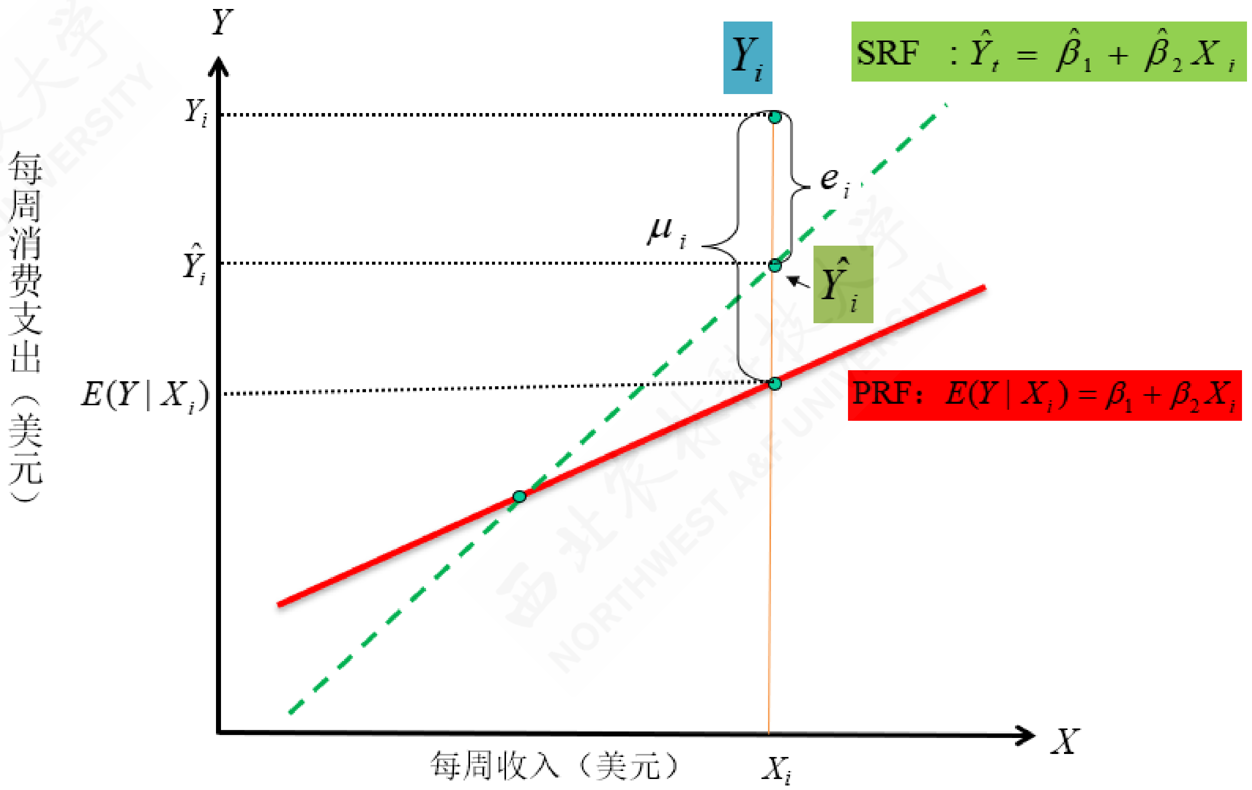
关于统计显著性与实际显著性。

- 不能一味追求统计显著性，有时候还需要考虑“实际显著性”的现实意义。
- 举例说明：
  - 边际消费倾向(MPC)是指GDP每增加1美元带来消费的增加数；宏观理论表明收入乘数为：1/(1-MPC)。
  - 若MPC的95%置信区间为(0.7129,0.7306)，当样本表明MPC的估计值为$\widehat{MPC}=0.74$（此时，即乘数为3.84），你怎样抉择！！！

关于置信区间方法和显著性检验方法的选择。

- 一般来说，置信区间方法优于显著性检验方法！
- 例如：假设MPC $H_0: \beta_2 = 0$显然荒谬的！

方差分解（ANOVA）：Y变异的分解



$$(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i)$$

$$y_i = \hat{y}_i \qquad + e_i$$

方差分解（ANOVA）：平方和分解

$$
\begin{aligned}
(Y_i - \bar{Y}) &= (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i) \\
y_i &= \hat{y}_i \qquad + e_i \\
\sum y_i^2 &= \sum \hat{y}_i^2 \quad + \sum e_i^2 \\
TSS &= ESS \quad + RSS
\end{aligned}
$$

- 其中：TSS表示总离差平方和；ESS表示回归平方和；RSS表示残差差平方和

（附录）：平方和分解证明过程

$$
\begin{aligned}
\sum y_i^2 &= \sum (\hat{y}_i e_i)^2 \\
&= \sum (\hat{y}_i^2 + 2\hat{y}_i e_i + e_i^2) \\
&= \sum \hat{y}_i^2 + 2\sum \hat{y}_i e_i + \sum e_i^2 \\
&= \sum \hat{y}_i^2 + 2\sum \left((\hat{\beta}_2 x_i) e_i\right) + \sum e_i^2 \\
&= \sum \hat{y}_i^2 + 2\hat{\beta}_2 \sum (x_i e_i) + \sum e_i^2 \qquad \leftarrow \left[\sum x_i e_i = 0\right] \\
&= \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2
\end{aligned}
$$

方差分解（ANOVA）：双变量分解表

对于一元线性回归（双变量），方差分解的理论值如下：

变异来源	平方和符号SS	平方和计算公式	自由度 df	均方和符号MSS	均方和计算公式
回归平方和	ESS	$\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y}_i)^2=\sum\hat{y}_i^2$	1	MSS_{ESS}	$ESS/df_{ESS}=\hat{\beta}_2^2\sum x_i^2$
残差平方和	RSS	$\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2=\sum e_i^2$	n-2	MSS_{RSS}	$RSS/df_{RSS}=\frac{\sum e_i^2}{n-2}$
总平方和	TSS	$\sum(Y_i-\bar{Y}_i)^2=\sum y_i^2$	n-1	MSS_{TSS}	$TSS/df_{TSS}=\frac{\sum y_i^2}{n-1}$

- 步骤1：给出模型，并提出假设：

一元回归模型下：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$H_0: \beta_2 = 0; \quad H_1: \beta_2 \neq 0$$

多元回归模型下：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

$$H_0: \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0; \quad H_1: \text{not all} \quad \beta_j = 0, \quad j \in 2, 3, \cdots, k$$

- 步骤2：构造合适的检验统计量

$$\chi_1^2 = \left(\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sigma_{\hat{\beta}_2}}\right)^2 = \left(\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\sigma^2/\sum x_i^2}}\right)^2 = \frac{\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)^2 \sum x_i^2}{\sigma^2} \qquad \leftarrow \chi_1^2 \sim \chi^2(1)$$

$$\chi_2^2 = (n-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum e_i^2}{\sigma^2} \qquad \leftarrow \chi_2^2 \sim \chi^2(n-2)$$

$$F = \frac{\chi_1^2/1}{\chi_2^2/n-2} = \left(\frac{\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)^2 \sum x_i^2}{\sigma^2}\right) \Bigg/ \left(\frac{\sum e_i^2}{(n-2)\sigma^2}\right) = \frac{\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)^2 \sum x_i^2}{\sum e_i^2/(n-2)}$$

$$F \sim F(1, n-2)$$

- 步骤3：基于原假设 H_0计算出样本统计量。

$$
\begin{aligned}
F^* &= \frac{\left(\hat{\beta}_2-\beta_2\right)^2 \sum x_i^2}{\sum e_i^2/(n-2)} && \leftarrow H_0: \beta_2 = 0 \\
&= \frac{\hat{\beta}_2^2 \sum x_i^2}{\sum e_i^2/(n-2)} \\
&= \frac{ESS/df_{ESS}}{RSS/df_{RSS}} = \frac{MSS_{ESS}}{MSS_{RSS}} = \frac{\hat{\beta}_2^2 \sum x_i^2}{\hat{\sigma}^2}
\end{aligned}
$$

模型整体显著性检验：F检验

- 步骤4：给定显著性水平 $\alpha = 0.05$下，查出统计量的理论分布值。 $F_{1-\alpha}(1, n-2)$
- 步骤5：得到显著性检验的判断结论。
  - 若 $F^* > F_{1-\alpha}(1, n-2)$，则 模型整体显著性的F检验结果显著。换言之，在显著性水平 $\alpha = 0.05$下，应显著地拒绝原假设 H_0，接受备择假设 H_1，认为斜率参数 $\beta_2 \neq 0$。
  - 若 $F^* < F_{1-\alpha}(1, n-2)$，则 模型整体显著性的F检验结果不显著。换言之，在显著性水平 $\alpha = 0.05$下，不能显著地拒绝原假设 H_0，只能暂时接受原假设 H_0，认为斜率参数 $\beta_2 = 0$。

模型整体显著性检验：比较

F检验与t检验的联系：

- 在一元回归模型中，t检验与F检验的结论总是一致的。
- 对于检验斜率参数 β_2的显著性，两者可相互替代！在一元回归分析中，若假设 $H_0: \beta_2 = 0$，则 $F^* \simeq (t^*)^2$

F检验与t检验的不同：

- 检验目的不同。F检验是检验模型的整体显著性；t检验是检验各个回归参数的显著性。
- 假设的提出不同：
  - F检验：斜率系数联合假设 $H_0: \beta_2 = 0; \quad H_1: \beta_2 \neq 0$
  - t检验：回归系数分别假设 $H_0: \beta_i = 0; \quad H_1: \beta_i \neq 0; \quad i \in 1, 2$
- 检验原理的不同：F检验需要构造F统计量；t检验需要构造t统计量

（案例）教育程度与时均工资：计算ANOVA表

根据前述理论计算公式，可以算出具体的ANOVA分析表：

教育程度与时均工资案例的ANOVA分析表

变异来源	平方和SS	自由度df	均方和MSS
回归平方和ESS	95.4	1	95.42
残差平方和RSS	9.7	11	0.88
总平方和TSS	105.1	12	7.09

- 步骤1：给出模型 $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$，提出假设： $H_0: \beta_2 = 0; \quad H_1: \beta_2 \neq 0$
- 步骤2：构造合适检验的分布：

$$F = \frac{\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)^2 \sum x_i^2}{\sum e_i^2/(n-2)} \qquad \leftarrow F \sim F(1, n-2)$$

- 步骤3：基于原假设 $H_0: \beta_2 = 0$，可以计算出样本统计量。

$$F^* = \frac{\hat{\beta}_2^2 \sum x_i^2}{\sum e_i^2/(n-2)} = \frac{ESS/df_{ESS}}{RSS/df_{RSS}} = \frac{MSS_{ESS}}{MSS_{RSS}} = \frac{95.4253}{0.8812} = 108.2924$$

（案例）教育程度与时均工资：F检验

- 步骤4：给定 $\alpha = 0.05$下，查出F理论值 $F_{1-\alpha}(1, n-2) = F_{0.95}(1, 11) =$ 4.8443
- 步骤5：得到显著性检验的判断结论。因为 $F^* =$ 108.2924 大于 $F_{0.95}(1, 11) =$ 4.8443，所以模型整体显著性的F检验结果显著。换言之，在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，应显著地拒绝原假设 H_0，接受备择假设 H_1，认为斜率参数 $\beta_2 \neq 0$。

本节结束